

Blatt 18

Platzaufgaben

Platzaufgabe 63 Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 , die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \geq 0}$ und den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k^2} (z + \sqrt{2})^k$$

$$(b) \sum_{k=0}^{\infty} (2 + (-1)^k)^k (z - 2)^k$$

Platzaufgabe 64

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$?

(b) Wir haben die Potenzreihenentwicklung

$$f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Finden Sie eine Potenzreihenentwicklung von $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Finden Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{u(x)}{v(x)}$ für $x \in]-1, +1[$.

Platzaufgabe 65

- (a) Berechnen Sie $e^{2\pi i}$.
- (b) Bestimmen Sie die Menge $\{t \in \mathbb{R} : \exp(it) = -1\}$.
- (c) Berechnen Sie $\ln(2e) - \ln(2)$.
- (d) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{2x} - 1}$.

Platzaufgabe 66

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2$.

Wir kennen ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \sqrt{x}$.

- (a) Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} unter Verwendung der Formel $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
- (b) Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} unter Verwendung der Formel $\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$.
- (c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b).

Blatt 18

Hausaufgaben

Hausaufgabe 69 Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{2^{k+1}} (z+i)^k$.

- Bestimmen Sie ihren Entwicklungspunkt z_0 und ihren Konvergenzradius ρ .
- Skizzieren Sie ihre Konvergenzkreisscheibe.
- Für welche reellen $z \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Potenzreihe?

Hausaufgabe 70 Wir haben die Potenzreihenentwicklung

$$f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k .$$

- Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklungen für $f'(x)$ und $f''(x)$.
- Finden Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k = \frac{u(x)}{v(x)}$ für $x \in]-1, +1[$.

Hausaufgabe 71

- Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^3 \cos(x) = a \sin(4x) + b \sin(2x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^3)$.
- Berechnen Sie $\frac{|e^z|}{e^{\operatorname{Re}(z)}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Hausaufgabe 72 Sei $f :]0, \pi[\rightarrow]-1, +1[: x \mapsto \cos(x)$ die eingeschränkte Cosinusfunktion. Ihre Umkehrfunktion ist die Arcuscosinusfunktion

$$f^{-1} =: \arccos :]-1, +1[\rightarrow]0, \pi[: x \mapsto \arccos(x) .$$

- Skizzieren Sie den Graphen $y = f(x)$, den Graphen $y = f^{-1}(x)$ und die Gerade $y = x$ in ein gemeinsames Schaubild.
- Vereinfachen Sie $\sin(\arccos(x))^2$ zu einem Polynom, wobei $x \in]-1, +1[$.
- Bestimmen Sie $\frac{d}{dx} \arccos(x)$.
- Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{d}{dx} \arccos(x)$.