Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2020

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 21

Platzaufgaben

Platzaufgabe 75 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x(x^2 - y^2 - 3)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Platzaufgabe 76 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Platzaufgabe 77 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy^2$. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\nabla_g(x, y)$.

(b) Geben Sie das Lagrange-Gleichungssystem für f unter Nebenbedingung $g = 0$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Entscheiden Sie für jede Flachstelle, die in $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ liegt, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Platzaufgabe 78 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y^2 - \frac{1}{4}x^2$.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f.

(b) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x, y) = 0 \,\}$.

Markieren Sie mit “+” in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f positiven Funktionswert hat.

Markieren Sie mit “$-$” in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f negativen Funktionswert hat.

(c) Entscheiden Sie anhand Ihrer Skizze, ob die Flachstelle eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Mathematatik 2 für inf, swt, msv

Blatt 21

Hausaufgaben

Hausaufgabe 81 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{x+z}(x^2 + xy + y^2 + 3z)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Hausaufgabe 82 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 - 1)(x^2 + (y - 1)^2 - 2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, die in $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ liegt, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Hausaufgabe 83

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} t & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t positiv definit ist.
Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t negativ definit ist.

(b) Gegeben ist die Funktion $f : [-2, 2] \times [0, 2] \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(\pi y)(x^2 - y)$.

Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x, y) \in [-2, 2] \times [0, 2] \ : \ f(x, y) = 0 \,\}$.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f positiven Funktionswert hat.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f negativen Funktionswert hat.

Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ lokale Extremstellen von f sind.

Hausaufgabe 84 Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (x - y)^2 + z(x - y)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8,\ 4xy + z^2)$.

(a) Zeigen Sie: Es ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.
Ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$?

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f unter Nebenbedingung $h = 0$.

(c) Es ist $(1, -1, 2)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $h = 0$.
Ist $(1, -1, 2)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $h = 0$?