Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 23

Platzaufgaben

Platzaufgabe 83 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 2y \cdot \sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$. Probe!

(b) Sei $y(x)$ die Lösung zum Anfangswert $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Sei $\tilde{y}(x)$ die Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(\frac{\pi}{2}) = 2$.
Bestimmen Sie ein $L \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y(\tfrac{\pi}{2}) - \tilde{y}(\tfrac{\pi}{2})|\mathrm{e}^{L|x-\frac{\pi}{2}|}\ .$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Platzaufgabe 84 Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{1+x}{x} \end{pmatrix} y$.

(a) Schreiben Sie es als ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_{>0}$. Probe!

(c) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \binom{1}{1}$.

(d) Geben Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem an.

(e) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems aus Teil (d).

Platzaufgabe 85 Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \left(\begin{smallmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 1 & 11 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{smallmatrix}\right) y$.

(a) Entscheiden Sie, welches der folgenden Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem ist.

(1) $(\mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix})$

(2) $(\mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix})$

(3) $(e^{12x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{12x}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix})$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix}2\\-2\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2020

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 23

Hausaufgaben

Hausaufgabe 89 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{xy}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$. Probe!

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $-\frac{x}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $\max\{\, |-\frac{x}{1+x^2}| \,:\, x \in \mathbb{R} \,\}$.

(c) Sei $y(x)$ die Lösung zum Anfangswert $y(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,) = 1$.

Sei $\tilde{y}(x)$ die Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,) = 0$.

Bestimmen Sie ein $L \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \mathrm{e}^{L|x - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 90 Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_{>0}$. Probe!

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem.
Gibt es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$, für welches die Wronski-Determinante dieses Fundamentalsystems gleich 0 ist?

(c) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Hausaufgabe 91 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} (1+x)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (2-x)^{-1} & 0 \\ 1 & 2-x & x^{-1} \end{pmatrix} y$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $]0,2[$. Probe!

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Hausaufgabe 92 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{smallmatrix}\right) y$.

(a) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem?

$$\left(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.