

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 24

Platzaufgaben

Platzaufgabe 86 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

- (a) Ist A diagonalisierbar?
- (b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $S^{-1}AS =: D$ diagonal.
- (c) Berechnen Sie $\exp(Dx)$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (d) Berechnen Sie $\exp(Ax) = S \exp(Dx)S^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Überprüfen Sie zur Probe, ob $\det(\exp(Ax)) = \exp(\operatorname{tr}(Ax))$ ist.

Platzaufgabe 87 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2 \\y_2' &= 2y_2\end{aligned}$$

d.h., mit $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, das Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$.

- (a) Berechnen Sie $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x\right)$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimmen Sie unter Verwendung von (a) ein Fundamentalsystem für dieses Differentialgleichungssystem.
- (c) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Platzaufgabe 88

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$.
- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$.
- (c) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 24

Hausaufgaben

Hausaufgabe 93 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 94 Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Sei $\chi_A(X) = -(X - 4)^3$ bereits bekannt.

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 95 Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 96

- (a) Finden Sie $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\exp(A + B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$. Ist $AB = BA$?
- (b) Sei $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Bestätigen Sie unter Verwendung der Definition der Matrixexponentialfunktion: $\exp(A^t) = \exp(A)^t$.