Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 12

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 45 Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$S^{\mathrm{t}} A\, S = D.$$

Lösung. Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X\cdot \mathrm{E}_4) = \det \begin{pmatrix} 1-X & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1-X & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1-X & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1-X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-X & -2 & 2 & -2 \\ -1-X & -1-X & 0 & 0 \\ 1+X & 0 & -1-X & 0 \\ -1-X & 0 & 0 & -1-X \end{pmatrix} \\
&= (1+X)^3 \det \begin{pmatrix} 1-X & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1+X)^3 \det \begin{pmatrix} 7-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -(1+X)^3(7-X) = (X+1)^3(X-7)
\end{aligned}$$

Also besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 := -1$ und $\lambda_2 := 7$.
Zu $\lambda_1 = -1$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums.

$$A + \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{E}_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(-1)$ zu bestimmen.
Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es wird $d_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist $d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es wird
$d_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Also ist $d_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(-1)$.
Zu $\lambda_2 = 7$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums. Das Gaußverfahren beginnen wir damit, die letzte Zeile an die erste Position zu tauschen.

$$A - 7\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{E}_A(7) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert die Orthonormalbasis $(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(7)$.

Zusammensetzen ergibt eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D mit $S^{\mathrm{t}} A\, S = D$.

$$S := \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 46 Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -2\mathrm{i} & -2 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 4 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\bar{S}^{\mathrm{t}} A\, S = D.$$

Lösung. Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. Im ersten Schritt addieren wir dabei die erste Spalte und das i-fache der zweiten Spalte auf die dritte Spalte. Außerdem addieren wir das i-fache der ersten Spalte und die zweite Spalte auf die vierte Spalte.

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{E}_4) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 2-X & -2\mathrm{i} & -2 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 4-X & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & 4-X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & -X & -\mathrm{i}X \\ 0 & 2-X & -\mathrm{i}X & -X \\ -2 & 2\mathrm{i} & -X & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & -X \end{pmatrix}$$

$$= X^2 \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 2-X & \mathrm{i} & 1 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^2 \det \begin{pmatrix} 6-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-X & 0 & 0 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^2(X-6)^2$$

Also besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 := 0$ und $\lambda_2 := 6$.

Zu $\lambda_1 = 0$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums.

$$A - 0\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -2\mathrm{i} & -2 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 4 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & -2 & 2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ und also auch eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(0)$. Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(0)$ zu bestimmen.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $d_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da die gefundenen Basisvekoren bereits orthogonal aufeinander standen, hat sich das Verfahren hier vereinfacht.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2) = (\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(0)$.

Zu $\lambda_2 = 6$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums. Dabei tauschen wir zuerst Zeile 3 an die erste Position.

$$A - 6\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & -4 & -2\mathrm{i} & -2 \\ -2 & 2\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & -4\mathrm{i} & 2 & -2\mathrm{i} \\ 0 & -4 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 0 & -4 & -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & \mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & \mathrm{i}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -\mathrm{i}/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und also auch $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(6)$. Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(6)$ zu bestimmen.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist $d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Da die gefundenen Basisvekoren bereits orthogonal aufeinander standen, hat sich das Verfahren hier vereinfacht.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{E}_A(6)$.

Zusammensetzen ergibt eine unitäre Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $\bar{S}^{\mathrm{t}} A\, S = D$.

$$S := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\mathrm{i} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&6&0 \\ 0&0&0&6 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 47 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 & -1 \\ -\mathrm{i} & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = -(X+2)^2(X-1)$.

(a) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\bar{S}^{\mathrm{t}} A\, S = D.$$

(b) Bestimmen Sie D^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen D^n und A^n? Bestimmen Sie damit A^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Lösung.

(a) Es besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 := -2$ und $\lambda_2 := 1$.

Zu $\lambda_1 = -2$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums.

$$A + 2\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & -1 \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-2)$. Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(-2)$ zu bestimmen.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{E}_A(-2)$.

Zu $\lambda_2 = 1$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums.

$$A - \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2 & -1 \\ -\mathrm{i} & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}/2 & -\mathrm{i}/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(1)$. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert die Orthonormalbasis $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(1)$.

Zusammensetzen ergibt eine unitäre Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $\bar{S}^{\mathrm{t}} A\, S = D$.

$$S := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{3} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit S aus Teil (a) gilt nun

$$A^n = (S\,D\,\bar{S}^{\mathrm{t}})^n = (S\,D\,\bar{S}^{\mathrm{t}}) \cdot (S\,D\,\bar{S}^{\mathrm{t}}) \cdot \ldots \cdot (S\,D\,\bar{S}^{\mathrm{t}}) = (S \cdot D \cdot D \cdot \ldots \cdot D \cdot \bar{S}^{\mathrm{t}}) = S\,D^n\,\bar{S}^{\mathrm{t}}.$$

Damit können wir nun A^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ bestimmen.

$$\begin{aligned} A^n = S\,D^n\,\bar{S}^{\mathrm{t}} &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{3} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 2 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{3}(-2)^n & -\mathrm{i}(-2)^n & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ \sqrt{3}(-2)^n & (-2)^n & -\sqrt{2} \\ 0 & 2(-2)^n & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 2 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 3(-2)^n+(-2)^n+2 & 3\mathrm{i}(-2)^n-\mathrm{i}(-2)^n-2\mathrm{i} & -2\mathrm{i}(-2)^n+2\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i}(-2)^n+\mathrm{i}(-2)^n+2\mathrm{i} & 3(-2)^n+(-2)^n+2 & 2(-2)^n-2 \\ 2\mathrm{i}(-2)^n-2\mathrm{i} & 2(-2)^n-2 & 4(-2)^n+2 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-2)^n+1 & \mathrm{i}((-2)^n-1) & -\mathrm{i}((-2)^n-1) \\ -\mathrm{i}((-2)^n-1) & 2(-2)^n+1 & (-2)^n-1 \\ \mathrm{i}((-2)^n-1) & (-2)^n-1 & 2(-2)^n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hausaufgabe 48 Wir betrachten eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$.
Es sei bekannt, dass A die Eigenwerte -1, $\frac{1}{2}$ und 2 mit den folgenden Eigenräumen besitzt.

$$\mathrm{E}_A(\tfrac{1}{2}) = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad \mathrm{E}_A(2) = \langle \begin{pmatrix} 1\\2\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-3\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-3\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mit

$$S^{\mathrm{t}} A\, S = D.$$

(b) Bestimmen Sie die Spur $\mathrm{tr}(A)$ und die Determinante $\det(A)$ von A.

Lösung.

(a) Wir bestimmen zunächst den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 := -1$. Da $\mathrm{E}_A(\frac{1}{2})$ Dimension 2 und $\mathrm{E}_A(2)$ Dimension 3 besitzt, muss $\mathrm{E}_A(-1)$ die Dimensions $6-2-3=1$ besitzen. Da A symmetrisch ist, muss der Basisvektor von $\mathrm{E}_A(-1)$ senkrecht auf allen Basisvektoren in $\mathrm{E}_A(\frac{1}{2})$ und $\mathrm{E}_A(2)$ stehen. Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

Das Gaußverfahren liefert nun die folgenden Umformungsschritte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -6 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 10 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/6 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5/6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/12 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/12 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $(\begin{pmatrix} -5/12\\-1/12\\-7/12\\-1/4\\1\\0 \end{pmatrix})$ und also auch $(\begin{pmatrix} 5\\1\\7\\3\\-12\\0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-1)$. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert die Orthonormalbasis $(\frac{1}{2\sqrt{57}}\begin{pmatrix} 5\\1\\7\\3\\-12\\0 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(-1)$.

Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(\frac{1}{2})$ zu bestimmen.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3\\1\\2/3\\3\\2/3\\0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$d_2 = \frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix} -4\\3\\2\\9\\2\\0 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\\9\\2\\0\end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(\frac{1}{2})$.

Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(2)$ zu bestimmen.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix})\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Damit ist $d_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Es wird
$$d_3' = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$
Damit ist $d_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Orthonormalbasis $(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(2)$.

Beginnt man das Gram-Schmidt-Verfahren mit der Basis $(c_1, c_2, c_3) := (\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix})$ von $\mathrm{E}_A(2)$, lässt sich die Rechnung etwas verkürzen.

Insgesamt ergibt dies eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D mit $S^{\mathrm{t}} A\, S = D$.

$$S := \frac{1}{2\sqrt{57}}\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{19} & -4\sqrt{2} & \sqrt{38} & \sqrt{57} & 0 \\ 1 & 0 & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{38} & -\sqrt{57} & 0 \\ 7 & 2\sqrt{19} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{38} & -\sqrt{57} & 0 \\ 3 & 0 & 9\sqrt{2} & 0 & \sqrt{57} & 0 \\ -12 & 2\sqrt{19} & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{57} \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Mit den Matrizen S und D aus Teil (a) erhalten wir $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(SD\,S^{\mathrm{t}}) = \mathrm{tr}(D) = 6$ und $\det(A) = \det(SD\,S^{\mathrm{t}}) = \det(D) = -2$.