Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 13

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 49 Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := -\dfrac{3}{(x-2)^4}$ gegeben.

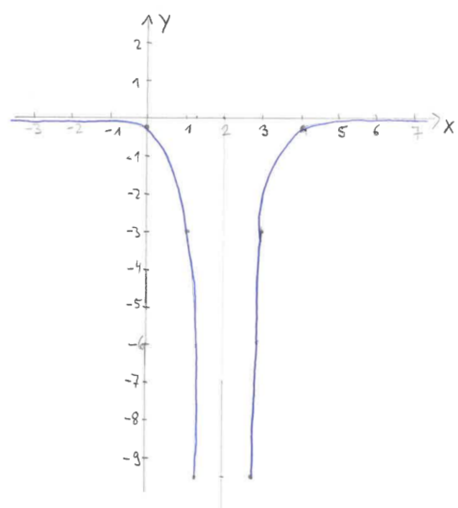
(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(-\infty))$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Zeigen Sie $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ unter Verwendung von ε und δ.
Entscheiden Sie, ob f bei $x_0 = 2$ konvergent, transvergent oder divergent ist.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.



(b) Es ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(-\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(-\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : f(x) < -\varepsilon\}$.
Es gilt

$$f(x) < -\varepsilon \iff \frac{3}{(x-2)^4} > \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} > (x-2)^4 \iff \sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon}} > |x-2|\,.$$

Also ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(-\infty)) = (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \cap \mathrm{U}_{\sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon}}}(2)$.

(c) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir wählen dazu $\delta := \sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach (b) gilt

$$(\mathbb{R} \setminus \{2\}) \cap \mathrm{U}_\delta(2) \quad \subseteq \quad f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(-\infty)).$$

Also ist $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$. Also ist f bei $x_0 = 2$ transvergent.

Hausaufgabe 50

Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften $(1, 2, 3)$.

(1) Es ist f nicht stetig an der Stelle $x_0 = 1$, aber stetig an allen anderen Stellen.
Die Unstetigkeit an der Stelle $x_0 = 1$ soll hierbei mittels ε und δ begründet werden.

(2) Es ist $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(3) Es ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Hinweis: Zur Definition von f darf eine Fallunterscheidung verwendet werden, um sich eine bereichsweise Definition zu ermöglichen.

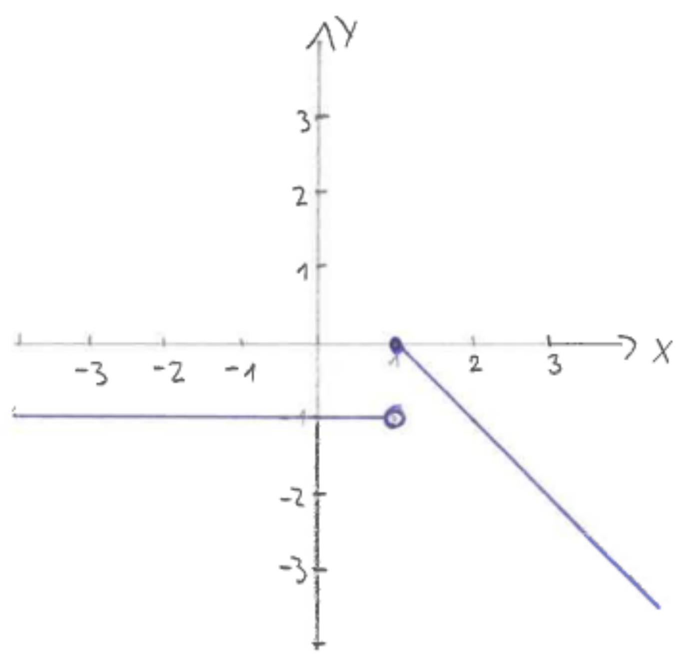
Lösung. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 1 \\ 1 - x & \text{falls } x \geqslant 1\,. \end{cases}$

Zu (1). Es ist f stetig in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir zeigen, dass f in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.
Annahme, f ist stetig in 1. Dann ist $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$.
Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(\mathrm{U}_\delta(1)) \subseteq \mathrm{U}_\varepsilon(0) = \,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\,$.
Da $1-\frac{\delta}{2} \in \mathrm{U}_\delta(1)$, ist $-1 = f(1-\frac{\delta}{2}) \in f(\mathrm{U}_\delta(1)) \subseteq \,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\,$. Wir haben einen *Widerspruch.*

Zu (2). Es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty\,.$

Zu (3). Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -1 = -1\,.$

Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.



Hausaufgabe 51

Gegeben seien Parameter $a,\, b \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := ax - \sqrt{x^2 + bx}.$$

(a) Bestimmen Sie $\Phi_{a,b} := \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $\{(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \Phi_{a,b} < -1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{a,b} &= \lim_{x\to+\infty} f(x) \\
&= \lim_{x\to+\infty} ax - \sqrt{x^2 + bx} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(ax - \sqrt{x^2+bx})(ax + \sqrt{x^2+bx})}{ax + \sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{a^2x^2 - (x^2+bx)}{ax + \sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^2-1)x^2 - bx}{ax + \sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^2-1)x - b}{a + \sqrt{1 + \frac{b}{x}}}\,.
\end{aligned}$$

Fall 1: $a = 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,b} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-b}{1 + \sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\
&= \frac{-b}{\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)} \\
&= \frac{-b}{1 + \sqrt{1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}}} \\
&= \frac{-b}{1 + \sqrt{1+0}} \\
&= -\frac{b}{2}\,.
\end{aligned}$$

Fall 2: $a \neq 1$. Dann ist

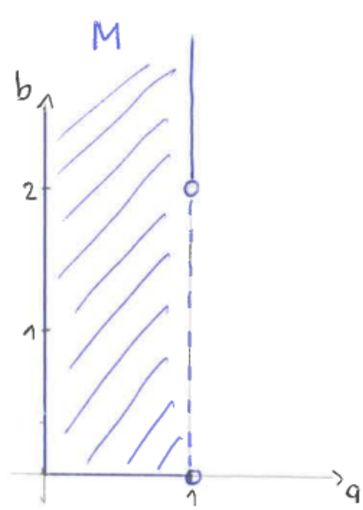
$$
\begin{aligned}
\Phi_{a,b} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^2-1)x-b}{a+\sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\
&= (a^2-1)\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{b}{a^2-1}}{a+\sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\
&= (a^2-1)\cdot \frac{\lim_{x\to+\infty} x - \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a^2-1}}{\lim_{x\to+\infty} a + \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\
&= (a^2-1)\cdot \frac{+\infty - \frac{b}{a^2-1}}{a+1} \\
&= (a^2-1)\cdot(+\infty) \\
&= \begin{cases} -\infty & \text{falls } a<1 \\ +\infty & \text{falls } a>1\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir also

$$
\Phi_{a,b} = \begin{cases} -\infty & \text{falls } a<1 \\ -\dfrac{b}{2} & \text{falls } a=1 \\ +\infty & \text{falls } a>1\,. \end{cases}
$$

(b) Sei $M := \{(a,b)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0} : \Phi_{a,b} < -1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Unter Verwendung von (a) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M &= \{(a,b)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0} : (a<1)\vee((a=1)\wedge(b>2))\} \\
&= [\,0,1\,[\,\times\mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{1\}\times\mathbb{R}_{>2}\,.
\end{aligned}
$$



Hausaufgabe 52 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-12x+3}{3x^2+x-5}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2+12x-2\pi}{-3x+2\pi+3x^2}\right)$

Markieren Sie dabei in Ihrer Rechnung die Stelle, an welcher Sie die Stetigkeit der Sinusfunktion benötigen.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-12x+3}{3x^2+x-5} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{2\cdot\lim_{x\to-\infty} x - 12\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} + 3\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - 5\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{2\cdot(-\infty)-12\cdot 0+3\cdot 0}{3+0-5\cdot 0} \\
&= -\infty\,.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2+12x-2\pi}{-3x+2\pi+3x^2}\right) &\overset{\text{Sinusfunktion}}{\underset{\text{stetig}}{=}} \sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^2+12x-2\pi}{-3x+2\pi+3x^2}\right) \\
&= \sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi+\frac{12}{x}-\frac{2\pi}{x^2}}{-\frac{3}{x}+\frac{2\pi}{x^2}+3}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\lim_{x\to+\infty}\pi+\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2\pi}{x^2}}{-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\pi}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}3}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi+0-0}{-0+0+3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Wir verwenden das Sandwich-Kriterium. Da $-1 \leqslant \cos(1+\sqrt{x}) \leqslant +1$, ist

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leqslant +\frac{1}{\sqrt{x}}$$

für $x\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Zum einen gilt $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Zum anderen gilt $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Diese beiden Grenzwerte stimmen überein. Also ist $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$.