Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 14

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 53 Wir betrachten die Folge $(a_k)_{k\geqslant 1} := (2\cos(\frac{2\pi k}{3}) + 1 - k^{-1})_{k\geqslant 1}$.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ unter Verwendung konvergenter Teilfolgen.

(b) Bestimmen Sie $\limsup_{k\to\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Lösung.

(a) Nach einer Betrachtung der Periodizität der Folge $\big(\cos(\frac{2\pi k}{3})\big)_{k\geqslant 1}$ betrachten wir drei Teilfolgen.

(1) Sei $k_j := 3j$ für $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 1} = 2\cos(2\pi j) + 1 - \frac{1}{3j} = 3 - \frac{1}{3j}$$

mit Grenzwert 3.

(2) Sei $k_j := 3j + 1$ für $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 0} = 2\cos(2\pi j + \frac{2\pi}{3}) + 1 - \frac{1}{3j+1} = -\frac{1}{3j+1}$$

mit Grenzwert 0.

(3) Sei $k_j := 3j + 2$ für $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 0} = 2\cos(2\pi j + \frac{4\pi}{3}) + 1 - \frac{1}{3j+2} = -\frac{1}{3j+2}$$

mit Grenzwert 0.

Jede Zahl in $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ lässt sich eindeutig als $3j$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ oder als $3j+1$ oder $3j+2$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ schreiben. Also haben wir alle Grenzwerte von konvergenten oder transvergenten Teilfolgen gefunden, und das sind gerade die Häufungspunkte.

Somit ist $\{0, 3\}$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$.

Möglich wäre es auch, die letzten beiden Teilfolgen mit Grenzwert 0 durch eine einzige Teilfolge mit Grenzwert 0 zu ersetzen. Dies würde jedoch die rechnerische Durchführung erschweren. Also: lieber etwas redundant und dafür problemlos berechenbar.

(b) Der Limes superior ist definiert als der maximale Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$. Wir erhalten

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \max\{0,3\} = 3.$$

Da die Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ mehr als einen Häufungspunkt besitzt, hat diese Folge keinen Grenzwert.

Also kann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergieren. Denn würde diese Reihe konvergieren, so müsste $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ gelten.

Hausaufgabe 54

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(s+1)^{2k+1}$ konvergiert.

Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $s = -\frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie die Teleskopsumme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!}$ für $n \geqslant 3$.

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!}$.

Lösung.

(a) Die Reihe kann in eine geometrische Reihe umgeformt werden.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(s+1)^{2k+1} = (s+1)\sum_{k=1}^{\infty}(s+1)^{2k} = (s+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left((s+1)^2\right)^k = (s+1)\sum_{k=0}^{\infty}\left((s+1)^2\right)^k - (s+1)$$

Setzen wir $q_s := (s+1)^2$, so konvergiert die Reihe genau dann, wenn $|q_s| < 1$. Nun gilt $|(s+1)^2| = |s+1|^2 < 1$ genau dann, wenn $|s+1| < 1$ ist, d.h. genau dann, wenn $s \in \,]-2,0[$ ist.

Also ist die Reihe für $s \in \,]-2,0[$ konvergent. Für $s \in \mathbb{R}\setminus]-2,0[$ ist sie nicht konvergent.

Sei nun $s = -\frac{1}{2}$. Mit den Umformungen wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(s+1)^{2k+1} &= (s+1)\sum_{k=0}^{\infty}\left((s+1)^2\right)^k - (s+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(b) Wir formen die gegebene Summe um.

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!} = \sum_{k=3}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)!} - \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=3}^{n} \frac{k-1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}$$

Setzen wir $a_k := \frac{k-1}{k!}$ für $k \geqslant 3$, so ist dies eine Teleskopsumme von der Form

$$\sum_{k=3}^{n} a_k - a_{k+1} = -\sum_{k=3}^{n} (a_{k+1} - a_k) = -(a_{n+1} - a_3) = -\frac{n}{(n+1)!} + \frac{1}{3}\,.$$

Damit wird $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!} = \frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Wir haben

$$0 \leqslant \frac{n}{(n+1)!} \leqslant \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$$

mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Nach dem Sandwich-Kriterium ist damit auch $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 0$ und wir erhalten

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k^2-1)-k}{(k+1)!} = \frac{1}{3}\,.$$

Hausaufgabe 55

(a) Sei $(a_n)_{n\geqslant 0} := (n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2)_{n\geqslant 0}$.

Berechnen Sie a_{10}, a_{100} und a_{1000} in Dezimaldarstellung mit dem Taschenrechner, auf 8 Nachkommastellen genau.

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2$.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{4k^2+1} - 2k)$$

Lösung.

(a) Eine direkte Rechnung ergibt die gesuchten Folgenglieder.

$$\begin{aligned} a_{10} &= 0{,}24984360 \\ a_{100} &= 0{,}24999844 \\ a_{1000} &= 0{,}24999998 \end{aligned}$$

Wir erwarten also, dass der Grenzwert der Folge gerade $\frac{1}{4}$ ist. Umformen der Folge bestätigt diese Vermutung.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2)(n\sqrt{1+4n^2} + 2n^2)}{n\sqrt{1+4n^2} + 2n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+4n^2) - 4n^4}{n\sqrt{1+4n^2} + 2n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4n^2} + 2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 4} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Wurzelfunktion hat es hierbei erlaubt, den $\lim_{n\to\infty}$ unter die Wurzel zu ziehen.

(b) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium, um die Konvergenz der Reihe nachzuweisen. Als Vorbereitung führen wir eine ähnliche Umformung wie in Teil (a) durch.

$$\sqrt{4k^2+1}-2k = \frac{(\sqrt{4k^2+1}-2k)(\sqrt{4k^2+1}+2k)}{\sqrt{4k^2+1}+2k} = \frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k}$$

Damit können wir die drei Bedingungen des Leibniz-Kriteriums überprüfen.

- Die Folge $\big((-1)^k(\sqrt{4k^2+1}-2k)\big)_{k\geqslant 1}$ ist alternierend, d.h. die Folgenelemente haben abwechselndes Vorzeichen.
- Es gilt $|(-1)^{k+1}(\sqrt{4(k+1)^2+1}-2(k+1))| \leqslant |(-1)^k(\sqrt{4k^2+1}-2k)|$ wegen
$$\frac{1}{\sqrt{4(k+1)^2+1}+2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k}\,.$$
- Es ist $\lim_{k\to\infty}|(-1)^k\sqrt{4k^2+1}-2k| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k} = 0.$

Damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{4k^2+1}-2k)$ konvergent.

Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent. Dazu müssen wir zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|(-1)^k(\sqrt{4k^2+1}-2k)| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k}$ nicht konvergiert. Wir haben die folgende Abschätzung für $k\geqslant 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4k^2+5k^2}+2k} = \frac{1}{5k}$$

Wäre nun die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k}$ konvergent, dann wäre nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\frac{1}{5}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ konvergent. Nach Multiplikation mit einem konstanten Faktor wäre damit auch die harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ konvergent. Dies ist aber nicht der Fall. Also kann $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}+2k}$ nicht konvergent sein. Somit ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{4k^2+1}-2k)$ nicht absolut konvergent.

Hausaufgabe 56

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\sqrt{k})^2}{k^3} \qquad\qquad \sum_{k=2}^{\infty}3^{1-k}\frac{(4+(-1)^k)^k}{2^k}$$

(b) Für welche $s\in\mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^{ks}}$?

Lösung.

(a) *Erste Reihe.* Wir haben folgende Abschätzung für $k \geqslant 1$.

$$\frac{(1+\sqrt{k})^2}{k^3} \leqslant \frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k})^2}{k^3} = \frac{4k}{k^3} = \frac{4}{k^2}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist $4\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{k})^2}{k^3}$. Nach dem Majorantekriterium konvergiert damit die zu untersuchende Reihe.

Zweite Reihe. Es ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} 3^{1-k} \frac{(4+(-1)^k)^k}{2^k} = 3 \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(4+(-1)^k)^k}{6^k}$.

Es genügt, mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(4+(-1)^k)^k}{6^k}$ zu zeigen.

Es ist

$$\sqrt[k]{\left|\frac{(4+(-1)^k)^k}{6^k}\right|} = \frac{4+(-1)^k}{6}\ .$$

Wir erhalten zwei konvergente Teilfolgen $(\frac{4+(-1)^{2j}}{6})_{j\geqslant 1}$ und $(\frac{4+(-1)^{2j+1}}{6})_{j\geqslant 1}$, deren Indizes $2j$ und $2j+1$ auch alle Indizes $k \geqslant 2$ abdecken.

Das gibt die zwei Häufungspunkte

$$\lim_{j\to\infty} \frac{4+(-1)^{2j}}{6} = \frac{5}{6}$$
$$\lim_{j\to\infty} \frac{4+(-1)^{2j+1}}{6} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(4+(-1)^k)^k}{6^k}\right|} = \frac{5}{6} < 1$. Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(4+(-1)^k)^k}{6^k}$ konvergent.

(b) Sei zunächst $s \leqslant 0$. Dann gilt für alle $k \geqslant 1$ die Ungleichung $\frac{k!}{k^{ks}} \geqslant 1$ und damit ist $(\frac{k!}{k^{ks}})_{k\geqslant 1}$ keine Nullfolge. Also kann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{ks}}$ für $s \leqslant 0$ nicht konvergieren.

Sei nun $s \geqslant 1$. Wir verwenden das Quotientenkriterium. Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)!/(k+1)^{(k+1)s}}{k!/k^{ks}}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)! \cdot k^{ks}}{k! \cdot (k+1)^{(k+1)s}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1) \cdot k^{ks}}{(k+1)^{(k+1)s}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{ks} \cdot \frac{1}{(k+1)^{s-1}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-s} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-1}} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-s} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-1}} \\
&= \mathrm{e}^{-s} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-1}}
\end{aligned}$$

Für $s = 1$ ist damit $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!/(k+1)^{(k+1)s}}{k!/k^{ks}} \right| = \mathrm{e}^{-1} \cdot 1 = \mathrm{e}^{-1} < 1$.

Für $s > 1$ ist damit $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!/(k+1)^{(k+1)s}}{k!/k^{ks}} \right| = \mathrm{e}^{-s} \cdot 0 = 0 < 1$.

Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{ks}}$ für $s \geqslant 1$ nach dem Quotientenkriterium.