Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

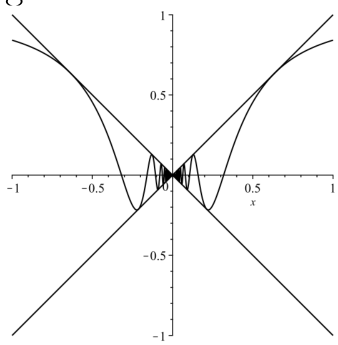
Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 15

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 57 Sei

$$f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$



Ihr Graph ist rechts abgebildet.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : h \mapsto g(h) := \sin(1/h)$.
Finden Sie Folgen $(a_n)_{n\geqslant 0}$ und $(b_n)_{n\geqslant 0}$ mit folgenden Eigenschaften (1, 2).

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$

Untersuchen Sie, ob $\lim_{h\to 0} g(h)$ existiert.
Hinweis: Hierzu kann die zweite Bemerkung in §4.3 verwendet werden.

(c) Ist f in 0 differenzierbar? Untersuchen Sie dies direkt mit der Definition der Ableitung.

Lösung.

(a) Für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist

$$f'(x) \;=\; 1 \cdot \sin(1/x) + x \cdot (\cos(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2}) \;=\; \sin(1/x) - \frac{1}{x}\cos(1/x)\;.$$

(b) Sei $(a_n)_{n\geqslant 0} := \left(\frac{1}{\pi/2+2\pi n}\right)_{n\geqslant 0}$ und $(b_n)_{n\geqslant 0} := \left(\frac{1}{3\pi/2+2\pi n}\right)_{n\geqslant 0}$.
Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) \;=\; \lim_{n\to\infty} 1 \;=\; 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sin(3\pi/2 + 2\pi n) \;=\; \lim_{n\to\infty} -1 \;=\; -1\,.$$

Wir zeigen, dass $\lim_{h\to 0} g(h)$ nicht existiert.
Annahme, $\lim_{h\to 0} g(h)$ existiert. Dann ist nach der zweiten Bemerkung in §4.3

$$1 \;=\; \lim_{n\to\infty} g(a_n) \;=\; \lim_{h\to 0} g(h) \;=\; \lim_{n\to\infty} g(b_n) \;=\; -1\,.$$

Wir haben einen *Widerspruch.*

(c) Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \sin(1/h)\;.$$

Da dieser Grenzwert nach (b) nicht existiert, ist f in 0 nicht differenzierbar.

Hausaufgabe 58 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ gegeben.
Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$.

(a) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2+1})$

(b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$

Lösung.

(a) Es ist

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\sqrt{x^2+1}) = -\sin(\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = -\sin(\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin(\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\
&= -\cos(\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sin(\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\\
&= -\frac{x^2\cos(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1} - \frac{(x^2+1-x^2)\sin(\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)^{3/2}}\\
&= -\frac{x^2\cos(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1} - \frac{\sin(\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)^{3/2}} .
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos(x)}{x^2+1} = \frac{-\sin(x)\cdot(x^2+1) - \cos(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x)}{(x^2+1)^2} .$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x)}{(x^2+1)^2}\\
&= -\frac{(2x\sin(x) + (x^2+1)\cos(x) + 2\cos(x) - 2x\sin(x))\cdot(x^2+1)^2}{(x^2+1)^4}\\
&\qquad + \frac{((x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x))\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}\\
&= -\frac{(x^2+3)(x^2+1)^2\cos(x)}{(x^2+1)^4} + \frac{4x(x^2+1)^2\sin(x) + 8x^2(x^2+1)\cos(x)}{(x^2+1)^4}\\
&= \frac{4x(x^2+1)\sin(x) + (8x^2 - (x^2+3)(x^2+1))\cos(x)}{(x^2+1)^3}\\
&= \frac{4x(x^2+1)\sin(x) - (x^4 - 4x^2 + 3)\cos(x)}{(x^2+1)^3} .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 59 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x^2-7}-5}{x-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{\sin(x^4)}$

(c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (x-\frac{\pi}{2})\cdot \tan(x)$

Lösung.

(a) Es ist

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x^2-7}-5}{x-4} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{\frac{2x}{\sqrt{2x^2-7}}}{1} = \frac{2\cdot 4}{\sqrt{2\cdot 4^2-7}} = \frac{8}{5}\,.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin(x^4)} &\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(x^2)}{4x^3\cos(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{2x^2\cos(x^4)} \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{4x\cos(x^4)-8x^5\sin(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)}{2\cos(x^4)-4x^4\sin(x^4)} \\
&= \frac{\cos(0^2)}{2\cos(0^4)-4\cdot 0^4\cdot\sin(0^4)} \\
&= \frac{1}{2\cdot 1-0} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Alternativ darf man auch $t = x^2$ substituieren und $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{\sin(t^2)}$ mit l'Hôpital berechnen. Vgl. letzte Bemerkung in §4.1.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \pi/2} (x-\tfrac{\pi}{2})\cdot\tan(x) &= \lim_{x\to\pi/2} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\tan(x)^{-1}} \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{-\tan(x)^{-2}(1+\tan(x)^2)} \\
&= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\tan(x)^{-2}+1} \\
&= -1\,.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\lim_{x\to\pi/2}\tan(x)^{-1} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0$ ist.

Hausaufgabe 60 Sei $f : \mathbb{R}_{>-\frac{1}{2}} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ unter Verwendung einer Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $\mathrm{T}_1(f, x, 0)$ und $\mathrm{T}_2(f, x, 0)$.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$, $\mathrm{T}_1(f, x, 0)$ und $\mathrm{T}_2(f, x, 0)$ in eine gemeinsame Zeichnung.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{array}{lclcr}
f^{(0)}(x) & = & f(x) & = & (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
f^{(1)}(x) & = & -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 & = & (-1) \cdot (2x+1)^{-\frac{3}{2}} \\
f^{(2)}(x) & = & -\frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (2x+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 & = & (-1) \cdot (-3) \cdot (2x+1)^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(3)}(x) & = & -\frac{5}{2} \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (2x+1)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2 & = & (-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (2x+1)^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(4)}(x) & = & -\frac{7}{2} \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (2x+1)^{-\frac{9}{2}} \cdot 2 & = & (-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (2x+1)^{-\frac{9}{2}}
\end{array}$$

Somit vermuten wir folgende Formel.

$$f^{(n)}(x) \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n}(1-2k)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} .$$

Wir überprüfen diese Formel mit Induktion.

Induktionsanfang. Es ist $\left(\prod_{k=1}^{0}(1-2k)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2\cdot 0+1}{2}} \;=\; 1 \cdot (2x-1)^{-\frac{1}{2}} \;=\; f^{(0)}(x)$.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 1$. Wir nehmen an, es gilt

$$f^{(n-1)}(x) \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} .$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} \\
&=\; \left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right) \cdot (-\tfrac{2n-1}{2}) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}-1} \cdot 2 \\
&=\; \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)\right) \cdot (1-2n) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n-1+2}{2}} \\
&=\; \left(\prod_{k=1}^{n}(1-2k)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} .
\end{aligned}$$

Alternativ können wir auch

$$f^{(n)}(x) \;=\; (-1)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) \cdot (2x+1)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

oder

$$f^{(n)}(x) \;=\; (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot (2x+1)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

schreiben.

(b) Mit den Ableitungen aus (a) erhalten wir die folgenden Taylorpolynome.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1(f,x,0) &= f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)(x-0) &&= 1-x \\ \mathrm{T}_2(f,x,0) &= \mathrm{T}_1(f,x,0) + \tfrac{f^{(2)}(0)}{2}(x-0)^2 &&= 1-x+\tfrac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

(c) Die folgende Skizze zeigt die Graphen von $f(x)$, $\mathrm{T}_1(f,x,0)$ und $\mathrm{T}_2(f,x,0)$.