Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 16

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 61 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, x \mapsto \cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, 0)$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 0)| \leqslant C \cdot |x|^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Wir berechnen die Ableitungen mit Hilfe der Produktregel.

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -\sin(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-1} - \cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-2} \\
f^{(2)}(x) &= -\cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-1} + 2\sin(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-2} + 2\cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-3} \\
f^{(3)}(x) &= \sin(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-1} + 3\cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-2} - 6\sin(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-3} - 6\cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-4}
\end{aligned}
$$

(b) Mit den Ableitungen aus Teil (a) erhalten wir das folgende Taylorpolynom. Dabei benutzen wir, dass $(-\mathrm{i})^{-1} = \mathrm{i}$ ist.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_2(f, x, 0) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!} x^k = \mathrm{i} \cdot x^0 - (0 - 1) \cdot x^1 + \frac{-\mathrm{i} + 0 - 2\mathrm{i}}{2!} \cdot x^2 \\
&= \mathrm{i} + x - \frac{3\mathrm{i}}{2} x^2
\end{aligned}
$$

Der folgende Aufgabenteil (c) wurde wegen eines unsererseits übersehenen Schrittes aus der Korrektur genommen. Wir erklären zunächst diesen Schritt.

(c) Da f eine komplexwertige Funktion ist, müssen wir Real- und Imaginärteil separat betrachten; siehe auch die Bemerkung am Ende von §4.6.7 im Skript. Für komplexwertige Funktionen gilt der direkte Zusammenhang aus dem Satz von Taylor zwischen f, dem Taylorpolynom und dem Restglied nicht. Daher definieren wir die folgenden reellwertigen Funktionen, um den Satz von Taylor benutzen zu können.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f) &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{Re}\big(f(x)\big) \\
\mathrm{Im}(f) &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{Im}\big(f(x)\big).
\end{aligned}
$$

Wegen $\mathrm{Re}(f^{(n)}(x)) = \mathrm{Re}(f(x))^{(n)}$ und ebenso $\mathrm{Im}(f^{(n)}(x)) = \mathrm{Im}(f(x))^{(n)}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\mathrm{T}_2(f, x, 0)) &= \mathrm{T}_2(\mathrm{Re}(f), x, 0) \\
\mathrm{Im}(\mathrm{T}_2(f, x, 0)) &= \mathrm{T}_2(\mathrm{Im}(f), x, 0)
\end{aligned}
$$

und ebenso für das Restglied mit $\vartheta \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta)) &= \mathrm{R}_2(\mathrm{Re}(f),x,0,\vartheta)\\ \mathrm{Im}(\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta)) &= \mathrm{R}_2(\mathrm{Im}(f),x,0,\vartheta).\end{aligned}$$

Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt wie üblich $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}|f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)| &= \sqrt{|\,\mathrm{Re}\big(f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)\big)|^2 + |\,\mathrm{Im}\big(f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)\big)|^2}\\ &= \sqrt{|\,\mathrm{Re}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Re}(f),x,0)|^2 + |\,\mathrm{Im}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Im}(f),x,0)|^2}\end{aligned}$$

Wir wollen die beiden Summanden unter der Wurzel abschätzen. Dazu benutzen wir, dass $|\,\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|$ und ebenso $|\,\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ ist. Da sowohl $\mathrm{Re}(f)$ als auch $\mathrm{T}_2(\mathrm{Re}(f),x,0)$ reellwertige Funktionen sind, können wir die Aussage aus dem Satz von Taylor über das Restglied benutzen. Für ein $\vartheta_1 \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{Re}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Re}(f),x,0)| &= |\mathrm{R}_2(\mathrm{Re}(f),x,0,\vartheta_1)|\\ &= |\mathrm{Re}(\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_1))|\\ &\leqslant |\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_1)|\,.\end{aligned}$$

Genauso erhalten wir für ein $\vartheta_2 \in [0,1]$ die Abschätzung

$$|\,\mathrm{Im}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Im}(f),x,0)| \leqslant |\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_2)|\,.$$

Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned}|f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)| &= \sqrt{|\,\mathrm{Re}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Re}(f),x,0)|^2 + |\,\mathrm{Im}(f)(x) - \mathrm{T}_2(\mathrm{Im}(f),x,0)|^2}\\ &\leqslant \sqrt{|\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_1)|^2 + |\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_2)|^2}.\end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\vartheta \in [0,1]$ können wir nun wie gewohnt das Restglied von f abschätzen.

$$\begin{aligned}&|\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta)| = \left|\tfrac{f^{(3)}(\vartheta x)}{3!}x^3\right|\\ &= \tfrac{1}{6}|\sin(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-1} + 3\cos(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-2} - 6\sin(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-3} - 6\cos(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-4}||x|^3.\end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung und die Verträglichkeit von Betrag und Produkt ergibt die folgende Ungleichung.

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{6}|\sin(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-1} + 3\cos(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-2} - 6\sin(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-3} - 6\cos(\vartheta x)\cdot(\vartheta x - \mathrm{i})^{-4}||x|^3\\ &\leqslant \tfrac{1}{6}\left(|\sin(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-1}| + 3|\cos(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-2}| + 6|\sin(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-3}| + 6|\cos(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-4}|\right)|x|^3\end{aligned}$$

Wegen $|\sin(t)| \leqslant 1$ und $|\cos(t)| \leqslant 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ können wir weiter abschätzen.

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{6}\left(|\sin(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-1}| + 3|\cos(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-2}| + 6|\sin(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-3}| + 6|\cos(\vartheta x)|\cdot|(\vartheta x - \mathrm{i})^{-4}|\right)|x|^3\\ &\leqslant \tfrac{1}{6}\left(|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-1} + 3|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-2} + 6|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-3} + 6|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-4}\right)|x|^3\end{aligned}$$

Schließlich ist $|\vartheta x - \mathrm{i}| = \sqrt{\vartheta^2 x^2 + 1^2} \geqslant 1$ und damit $|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-1} \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das ergibt folgende Ungleichung.

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{6}\left(|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-1} + 3|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-2} + 6|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-3} + 6|\vartheta x - \mathrm{i}|^{-4}\right)|x|^3\\ &\leqslant \tfrac{1}{6}\left(1+3+6+6\right)|x|^3 = \tfrac{16}{6}|x|^3 = \tfrac{8}{3}|x|^3\end{aligned}$$

Setzen wir also $\tilde{C} := \frac{8}{3}$, so ist $|\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta)| \leqslant \tilde{C}\cdot|x|^3$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\vartheta \in [0,1]$.

Damit können wir nun unsere obige Abschätzung von $|f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)|$ fortsetzen.

$$\begin{aligned}
|f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)| &\leqslant \sqrt{|\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_1)|^2 + |\mathrm{R}_2(f,x,0,\vartheta_2)|^2} \\
&\leqslant \sqrt{\left(\tilde{C}\cdot|x|^3\right)^2 + \left(\tilde{C}\cdot|x|^3\right)^2} \\
&= \sqrt{2}\,\tilde{C}\cdot|x|^3
\end{aligned}$$

Setzen wir also $C := \sqrt{2}\,\tilde{C} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, so ist $|f(x) - \mathrm{T}_2(f,x,0)| \leqslant C\cdot|x|^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 62 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$.

Es sei bekannt, dass $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n+2)!}{2(1-x)^{n+3}}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 0)$.

(b) Verifizieren Sie unter Verwendung des Restglieds, dass $f(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 0)$ ist.

Hierbei darf $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{2^n} = 0$ verwendet werden.

(c) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 2)$. Gilt $f(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 2)$?

Lösung.

(a) Mit den gegebenen Ableitungen erhalten wir die folgende Taylorreihe.

$$\mathrm{T}_\infty(f, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)!}{2(1-0)^{k+3} k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k$$

(b) Nach dem Korollar von Taylor genügt es zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(f, \frac{1}{3}, 0, \vartheta_n) = 0$ ist für jede Folge $(\vartheta_n)_{n\geqslant 0}$ mit Werten $\vartheta_n \in [0,1]$. Wir bestimmen zunächst das Restglied. Sei dazu $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ und $\vartheta \in [0,1]$.

$$\mathrm{R}_n(f, \tfrac{1}{3}, 0, \vartheta) = \frac{(n+3)!}{2(1-\vartheta\frac{1}{3})^{n+4}(n+1)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2(1-\frac{\vartheta}{3})^{n+4} 3^{n+1}}$$

Wegen $\vartheta \in [0,1]$ ist $(1 - \frac{\vartheta}{3}) \geqslant \frac{2}{3}$. Damit erhalten wir folgende Abschätzung.

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2(1-\frac{\vartheta}{3})^{n+4} 3^{n+1}} \leqslant \frac{(n+2)(n+3)}{2(\frac{2}{3})^{n+4} 3^{n+1}} = \frac{3^3}{2^5} \frac{(n+2)(n+3)}{2^n} \leqslant \frac{3^3}{2^5} \frac{(n+3)^2}{2^n}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(f, \frac{1}{3}, 0, \vartheta) = \frac{3^3}{2^5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{2^n} = 0$.

(c) Analog zu Teil (a) erhalten wir die folgende Taylorreihe.

$$\mathrm{T}_\infty(f, x, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)!}{2(1-2)^{k+3} k!} (x-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} (x-2)^k$$

Nun ist $\mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} (-\frac{5}{3})^k$ nicht konvergent, denn $\left(-\frac{(k+1)(k+2)}{2}(\frac{5}{3})^k\right)_{k\geqslant 0}$ ist wegen $\frac{5}{3} > 1$ keine Nullfolge. Also kann $f(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 2)$ nicht gelten.

Hausaufgabe 63 Wir betrachten die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{5}\right)^k$.

(a) Bestimmen Sie ihren Entwicklungspunkt z_0 und ihren Konvergenzradius ρ.

(b) Skizzieren Sie ihre Konvergenzkreisscheibe.

(c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$.

(1) $z := 3$, (2) $z := 5 + 3\mathrm{i}$, (3) $z := -5 + 3\mathrm{i}$, (4) $z := 1 - 2\mathrm{i}$

Lösung.

(a) Wir schreiben die gegebene Reihe wie folgt um.

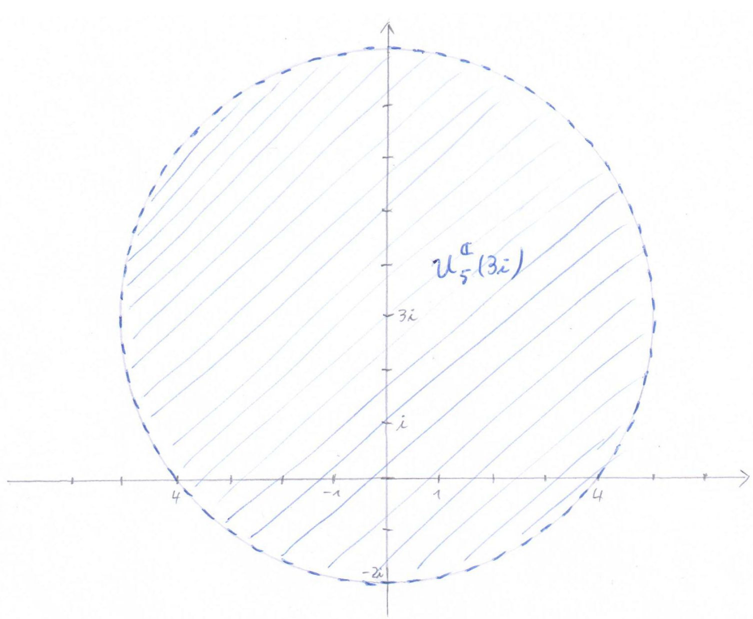
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k\sqrt{k}}\,(z-3\mathrm{i})^k$$

Jetzt können wir die Koeffizientenfolge $\left(\frac{1}{5^k\sqrt{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ und den Entwicklungspunkt $z_0 = 3\mathrm{i}$ ablesen. Den Konvergenzradius bestimmen wir mit Hilfe der Quotientenfolge. Dabei benutzen wir die Stetigkeit der Wurzelfunktion.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{5^k\sqrt{k}}{5^{k+1}\sqrt{k+1}}\right| = \frac{1}{5}\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{5}$$

Also ist $\rho = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$.

(b) Die folgende Skizze zeigt die Konvergenzkreisscheibe $\mathrm{U}_5^{\mathbb{C}}(3\mathrm{i})$. Der Rand ist nicht Teil der Konvergenzkreisscheibe.



(c) *Zu* (1). Für $z = 3$ ist $|z - z_0| = |3 - 3\mathrm{i}| = \sqrt{18} < 5$. Also liegt z auf der Konvergenzkreisscheibe und daher konvergiert die Reihe für $z = 3$.

> Sowohl in Teil (2) als auch in Teil (3) liegt z auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe. Es ist etwa $|(5 + 3\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}| = 5 = \rho$. In diesem Fall macht das Lemma zu Potenzreihen keine Aussage über die Konvergenz.

Zu (2). Für $z = 5 + 3\mathrm{i}$ erhalten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \left(\frac{5}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}$. Es gilt $k^{-1/2} \geqslant k^{-1}$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Wäre also die zu untersuchende Reihe konvergent, so wäre auch die harmonische Reihe konvergent. Dies ist nicht der Fall. Also konvergiert die Potenzreihe nicht für $z = 5 + 3\mathrm{i}$.

Zu (3). Für $z = -5 + 3\mathrm{i}$ erhalten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \left(\frac{-5}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2}$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist diese Reihe konvergent, denn $(k^{-1/2})_{k \geqslant 1}$ ist eine monotone Nullfolge und das Vorzeichen der Summanden wechselt jedesmal.

Zu (4). Für $z = 1 - 2\mathrm{i}$ ist $|z - z_0| = |1 - 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i}| = |1 - 5\mathrm{i}| = \sqrt{26} > 5$. Also liegt z außerhalb der Konvergenzkreisscheibe und daher konvergiert die Reihe für $z = 1 - 2\mathrm{i}$ nicht.

Hausaufgabe 64 Sei $D := \,]-1, 1[$. Sei $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$.

(a) Bestimmen Sie Polynome $r(x)$ und $s(x)$ mit $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ für $x \in D$.

(b) Schreiben Sie $f'(x)$ als Potenzreihe und als Bruch von Polynomen.

(c) Bestimmen Sie Polynome $t(x)$ und $u(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)x^{2k+1} = \frac{t(x)}{u(x)}$ für $x \in D$.

(d) Bestimmen Sie Polynome $v(x)$ und $w(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 2)x^{2k+1} = \frac{v(x)}{w(x)}$ für $x \in D$.

Lösung.

(a) Nach Umschreiben der Reihe erhalten wir eine geometrische Reihe. Für $x \in D$ ist diese konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^2\right)^k = x \cdot \frac{1}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}$$

Also können wir $r(x) := x$ und $s(x) := 1 - x^2$ wählen.

(b) Durch summandenweises Ableiten der Potenzreihe erhalten wir zum einen

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)x^{2k}$$

für $x \in D$. Zum anderen erhalten wir durch direktes Ableiten der Darstellung aus (a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}\,.$$

(c) Es ist $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k} = x \cdot f'(x)$. Mit Teil (b) erhalten wir daher die Polynome $t(x) := x(1+x^2)$ und $u(x) := (1-x^2)^2$. Für diese gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} = \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}$$

für $x \in D$.

Also können wir $t(x) := x + x^3$ und $u(x) := (1-x^2)^2$ wählen.

(d) Für $x \in D$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} + x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$$

mit den aus Teil (a) und (c) bekannten Reihen. Damit erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1} = \frac{x+x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}\,.$$

Wir können also $v(x) := 2x$ und $w(x) := (1-x^2)^2$ wählen.

Alternativ können wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+2}$ summandenweise ableiten, um die gesuchte Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1}$ zu erhalten. Für diese Reihen können wir die Schritte aus (a) und (b) wiederholen. Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+2} = \frac{x^2}{1-x^2}\,.$$

Ableiten ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1} = \frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$