Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 17

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 65

(a) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\sin(3x)\cos(x)^2 = a\sin(x) + b\sin(3x) + c\sin(5x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sin(3x)\cos(x)^2$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)\ln(x^2 + 2x + 1)$.

Lösung.

(a) Es ist

$$
\begin{aligned}
\sin(3x)\cos(x)^2 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \cdot \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^2 \\
&= \frac{1}{8\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{8\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{8\mathrm{i}}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) + 2(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x})) \\
&= \frac{1}{8\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(x) + 4\mathrm{i}\sin(3x) + 2\mathrm{i}\sin(5x)) \\
&= \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(5x)\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{1}{4}$.

(b) Nach (a) suchen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(5x)\,.$$

Wir haben folgende Ableitungen.

$$
\begin{aligned}
(-\cos(x))' &= \sin(x) \\
(-\cos(3x))' &= 3\sin(3x) \\
(-\cos(5x))' &= 5\sin(5x)
\end{aligned}
$$

Damit ist also

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := -\frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{20}\cos(5x)$$

eine Funktion mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sin(3x)\cos(x)^2$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}(x+1)\ln(x^2+2x+1) &= \lim_{x\to -1}(x+1)\ln((x+1)^2) \\
&= 2\lim_{x\to -1}(x+1)\ln((x+1)) \\
&= 2\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^{-1}} \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} 2\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{-1}}{-(x+1)^{-2}} \\
&= -2\lim_{x\to -1}(x+1) \\
&= -2\cdot 0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 66

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ unter Verwendung von exp und der Regel von l'Hôpital.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\vartheta \in [0,1]$ mit $\ln(x+1) - \ln(x) = (x+\vartheta)^{-1}$.
Folgern Sie: Es ist $\ln(x+1) - \ln(x) \geqslant (x+1)^{-1}$.

(c) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$.
Zeigen Sie: Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
Folgern Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$ ist monoton wachsend.

Lösung.

(a) Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$(1+\tfrac{1}{x})^x \;=\; \exp(\ln((1+\tfrac{1}{x})^x)) \;=\; \exp(x\ln(1+\tfrac{1}{x}))\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{1}{x})^x &= \lim_{x\to+\infty}\exp(x\ln(1+\tfrac{1}{x})) \\
&\overset{\text{exp stetig}}{=} \exp\left(\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\tfrac{1}{x})\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^{-1}}\right) \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^{-1}\cdot(-x^{-2})}{-x^{-2}}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \\
&= \exp(1) \\
&= \mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

(b) Nach der Bemerkung auf Seite 127 des Skripts gibt es ein $\vartheta \in [0,1]$ mit

$$\ln(x+1)-\ln(x) \;=\; \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{(x+1)-x} \;=\; \ln'(x+\vartheta((x+1)-x)) \;=\; (x+\vartheta)^{-1}\,.$$

Also ist $\ln(x+1) - \ln(x) = (x+\vartheta)^{-1} \geqslant (x+1)^{-1}$.

(c) Nach der ersten Rechnung in (a) ist $f(x) = \exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \exp(x\ln(1+\tfrac{1}{x}))\cdot(\ln(1+\tfrac{1}{x}) - x\cdot(1+\tfrac{1}{x})^{-1}\cdot x^{-2}) \\
&= f(x)\cdot(\ln(1+\tfrac{1}{x}) - (x+1)^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir wollen zeigen, dass $f'(x) \geqslant 0$ ist.
Da $f(x) \geqslant 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\ln(1+\frac{1}{x}) \geqslant (x+1)^{-1}$ ist.
In der Tat ist

$$\ln(1+\tfrac{1}{x}) \;=\; \ln(\tfrac{x+1}{x}) \;=\; \ln(x+1)-\ln(x) \;\overset{\text{(b)}}{\geqslant}\; (x+1)^{-1}.$$

Also ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Folglich ist f monoton wachsend.

Hausaufgabe 67 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x)$ der Sinus hyperbolicus.
Seine Umkehrfunktion heißt Areasinus hyperbolicus, geschrieben

$$f^{-1} : \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R} : x \mapsto f^{-1}(x) =: \operatorname{arsinh}(x).$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen $y = f(x)$, den Graphen $y = f^{-1}(x)$ und die Gerade $y = x$ in ein gemeinsames Schaubild.

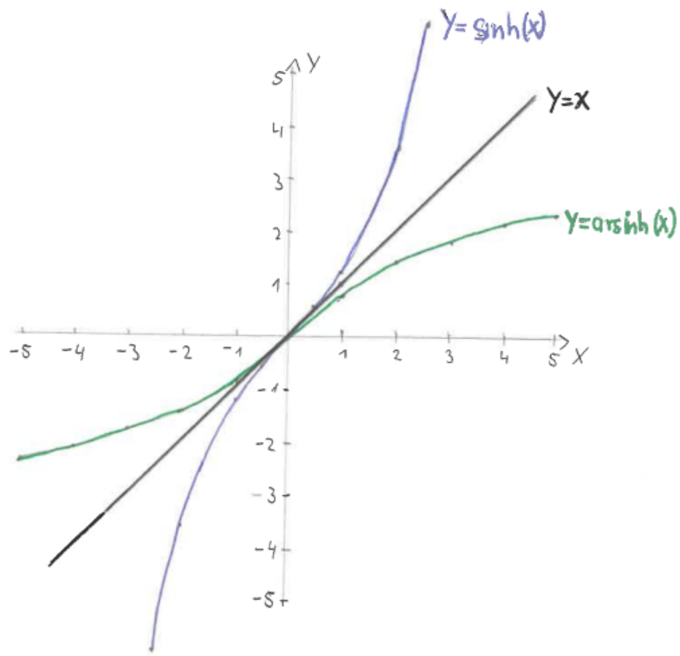
(b) Vereinfachen Sie $\cosh(\operatorname{arsinh}(x))^2$ zu einem Polynom, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arsinh}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arsinh}(x)}{\ln(x)}$.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt die Graphen $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ und die Gerade $y = x$.



Wir sehen, dass die Graphen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ auseinander hervorgehen.

(b) Es ist $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$ für $z \in \mathbb{C}$. Für $x \in \mathbb{R}$ wird damit

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x))^2 \;=\; 1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(x))^2 \;=\; 1 + x^2\,.$$

(c) Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arsinh}(x) \;=\; \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} \;=\; \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}\,.$$

Es ist $\operatorname{arsinh}(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arsinh}(x) \;=\; \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

(d) Es ist $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arsinh}(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \infty$.

Also wird

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arsinh}(x)}{\ln(x)} &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

.

Hausaufgabe 68 Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := 2^{-x^2}$.
Wir betrachten die Unterteilung $\underline{x} := (-2, -1, 0, 1, 2)$ von $[-2, 2]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Tragen Sie auch die Unterteilung $\underline{x}$ in Ihrer Skizze ein. Veranschaulichen Sie $\operatorname{Unter}(f, \underline{x})$ und $\operatorname{Ober}(f, \underline{x})$ als Flächeninhalte.

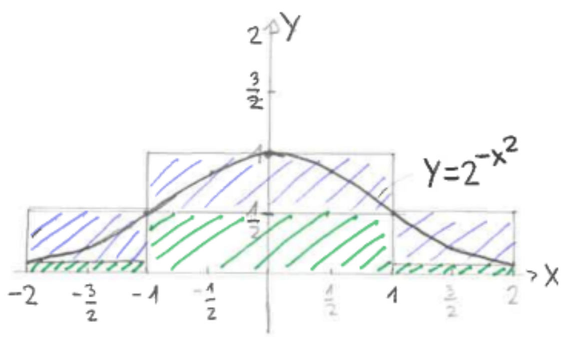
(b) Begründen Sie anhand der Skizze: Es ist $\operatorname{Ober}(f, \underline{x}) - \operatorname{Unter}(f, \underline{x}) \geqslant 1$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Unter}(f, \underline{x})$ und $\operatorname{Ober}(f, \underline{x})$.

(d) Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leqslant \int_{-2}^{2} 2^{-x^2}\, \mathrm{d}x \leqslant B$ und $B - A \leqslant 2$.

Lösung.

(a, b) Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.
Der Inhalt der grünen Fläche ist die Untersumme $\operatorname{Unter}(f, \underline{x})$.
Der Inhalt der grünen und der blauen Fläche zusammen ist die Obersumme $\operatorname{Ober}(f, \underline{x})$.



Die blaue Fläche ist $\operatorname{Ober}(f, \underline{x}) - \operatorname{Unter}(f, \underline{x})$. Da diese Fläche ein Rechteck der Breite 2 und Höhe $\frac{1}{2}$, also der Fläche 1, enthält, ist $\operatorname{Ober}(f, \underline{x}) - \operatorname{Unter}(f, \underline{x}) \geqslant 1$.

(c) Wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Unter}(f, \underline{x}) &= ((-1) - (-2)) \cdot \frac{1}{16} + (0 - (-1)) \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0) \cdot \frac{1}{2} + (2 - 1) \cdot \frac{1}{16} &= \frac{9}{8}\,. \\
\operatorname{Ober}(f, \underline{x}) &= ((-1) - (-2)) \cdot \frac{1}{2} + (0 - (-1)) \cdot 1 + (1 - 0) \cdot 1 + (2 - 1) \cdot \frac{1}{2} &= 3\,.
\end{aligned}$$

(d) Sei $A := \operatorname{Unter}(f, \underline{x}) \overset{\text{(c)}}{=} \frac{9}{8}$ und $B := \operatorname{Ober}(f, \underline{x}) \overset{\text{(c)}}{=} 3$.

Dann ist $A \leqslant \int_{-2}^{2} 2^{-x^2}\, \mathrm{d}x \leqslant B$ und $B - A \;=\; 3 - \frac{9}{8} \;=\; \frac{15}{8} \leqslant 2$.