Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 18

Lösungen zu den Hausaufgaben

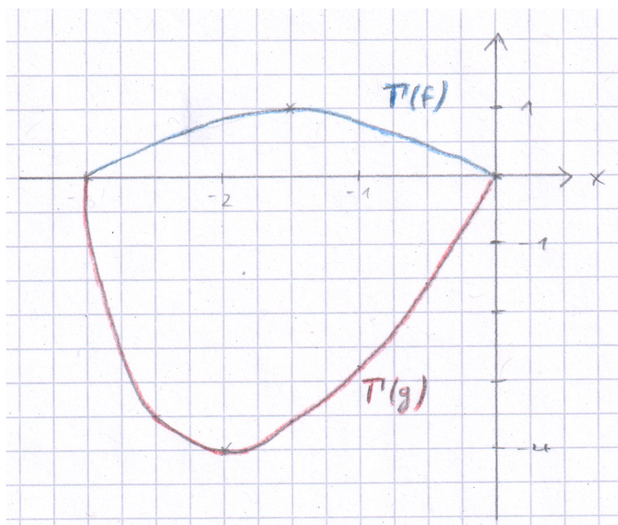
Hausaufgabe 69 Wir betrachten die Funktionen $f : [-3, 0] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(-\frac{\pi}{3}x)$ und $g : [-3, 0] \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x\sqrt{x+3}$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in eine gemeinsame Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen von f und g eingeschlossen ist.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt die Graphen von f und g.



(b) Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnen wir

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-3}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

da der Graph von g unter der x-Achse liegt. Für das erste Integral erhalten wir mit linearer Substitution

$$\int_{-3}^{0} \sin(-\tfrac{\pi}{3}x)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{3}{\pi}(-\cos(-\tfrac{\pi}{3}x))\right]_{-3}^{0} = \tfrac{3}{\pi} + \tfrac{3}{\pi} = \tfrac{6}{\pi}\,.$$

Für das zweite Integral substituieren wir $u(x) := x + 3$ mit $u'(x) = 1$.

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} 2x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{3} (u-3)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{3} u^{3/2} - 3u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\tfrac{4}{5}u^{5/2} - 4u^{3/2}\right]_{0}^{3} = \tfrac{4}{5}\cdot 9\cdot\sqrt{3} - 4\cdot 3\cdot\sqrt{3} \\ &= -\tfrac{24}{5}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Flächeninhalt $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-3}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{\pi} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$.

Hausaufgabe 70

(a) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)$ aus Hausaufgabe 67.(b).

(b) Zeigen Sie, dass $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\operatorname{arsinh}(x)$ gilt für $x\in\mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie $\dfrac{1}{\ln(5+\sqrt{26})}\cdot\displaystyle\int_0^5\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$

(d) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.$

Lösung.

(a) Wir bestimmen die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

In Hausaufgabe 67.(b) wurde $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ berechnet, was dasselbe ist.

(b) Nach Teil (a) ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)$. Die Stammfunktion ist nun eindeutig bis auf eine Konstante. Also gibt es ein $C\in\mathbb{R}$ mit

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\operatorname{arsinh}(x)+C$$

für $x\in\mathbb{R}$. Insbesondere muss diese Gleichung auch für $x=0$ gelten. Einsetzen ergibt einerseits $\ln(0+\sqrt{0+1})=\ln(1)=0$. Andererseits haben wir $\sinh(0)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-0})=0$ und damit auch $\operatorname{arsinh}(0)+C=0+C=C$. Also gilt $0=C$. Wir haben damit

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\operatorname{arsinh}(x)$$

für $x\in\mathbb{R}$ gezeigt.

(c) Wir rechnen mit der Stammfunktion aus Teil (a).

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(5+\sqrt{26})}\cdot\int_0^5\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\ln(5+\sqrt{26})}\Big[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^5\\&=\frac{1}{\ln(5+\sqrt{26})}\Big(\ln(5+\sqrt{26})-\ln(1)\Big)\\&=1-0=1\end{aligned}$$

(d) Wir rechnen wieder mit der Stammfunktion aus Teil (a). Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x} &= \left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(1+x)\right]_0^a \\
&= \left[\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x}\right)\right]_0^a \\
&= \ln\left(\frac{a+\sqrt{1+a^2}}{1+a}\right) - \ln(1) \\
&= \ln\left(\frac{a+\sqrt{1+a^2}}{1+a}\right).
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to+\infty} \ln\left(\frac{a+\sqrt{1+a^2}}{1+a}\right) = \ln\left(\lim_{a\to+\infty} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}}{\frac{1}{a}+1}\right) \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 71 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Substitution $u(x) := -x^3$ mit $u'(x) = -3x^2$.

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x^3} = -\frac{1}{3}\int -3x^2\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^u\right] = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{3}\right]$$

(b) Wir bestimmen das Integral mit Hilfe zweifacher partieller Integration. In der Schreibweise des Lemmas setzen wir $f_1'(x) = \sin(2x)$ und $g_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ für die erste Integration und $f_2'(x) = \cos(2x)$ und $g_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ für die zweite Integration.

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= [-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x}] - \int -\tfrac{1}{2}\cos(2x)(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\\ &= [-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x}] - \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= [-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x}] - \left([\tfrac{1}{4}\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}] - \int \tfrac{1}{4}\sin(2x)(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\right)\\ &= [-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x}] - [\tfrac{1}{4}\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}] - \int \tfrac{1}{4}\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Bringen wir das entstandene Integral auf die linke Seite, so erhalten wir

$$(\tfrac{1}{4}+1)\int \sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x} - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}]$$

und damit

$$\int \sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{5}[-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^{-x} - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}] = [-\tfrac{1}{5}(2\cos(2x)+\sin(2x))\mathrm{e}^{-x}].$$

Man kann auch den Integranden $\sin(2x)\mathrm{e}^{-x}$ mittels de Moivre in Exponentialterme umformen, dann mittels linearer Substitution integrieren und dann wieder zusammenfassen. Der Aufwand dafür scheint etwa vergleichbar zu sein. Dieser Weg involviert dann die Bestimmung des Inversen von komplexen Zahlen.

(c) Wir bestimmen das Integral mit Hilfe einer partiellen Integration. In der Schreibweise des Lemmas setzen wir $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ mit $f(x) = -\frac{1}{x}$ und $g(x) = \ln(3x)$ mit $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln(3x)\right] - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\ln(3x)}{x}\right] - \left[\frac{1}{x}\right] \\
&= \left[-\frac{\ln(3x)+1}{x}\right]
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 72 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{11}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2-2}} x\sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\ln(x)^2)}\,\mathrm{d}x$

(c) Aus Hausaufgabe 65.(b) kennen wir die Stammfunktion $-\frac{1}{4}\cos(x)-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{20}\cos(5x)$ von $\sin(3x)\cos(x)^2$, definiert auf $\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(3x)\cos(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

(a) Wir verwenden die Substitution $u(x) := \sqrt{x^2-2}$ mit $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{11}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2-2}} x\sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{11}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2-2}}(x^2-2)\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \mathrm{e}^u\, u^2\,\mathrm{d}u$$

Mit Hilfe zweifacher partieller Integration ergibt dies

$$\begin{aligned}\int_1^3 \mathrm{e}^u\, u^2\,\mathrm{d}u &= \left[\mathrm{e}^u\, u^2\right]_1^3 - \int_1^3 2\mathrm{e}^u\, u\,\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^u\, u^2 - 2\mathrm{e}^u\, u\right]_1^3 + \int_1^3 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \left[(u^2-2u+2)\mathrm{e}^u\right]_1^3 \\ &= 5\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden die Substitution $u(x) := \ln(x)$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\ln(x)^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(c) Mit der Stammfunktion aus Hausaufgabe 65.(b) ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(3x)\cos(x)^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{20}\cos(5x)\right]_0^{\pi} &= 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{14}{15}\end{aligned}$$