Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 19

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 73 Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int_2^3 \frac{8(x^2+5)}{(x^2-2x+5)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung. Wir faktorisieren $(x^2-2x+5)(x-1)^2 \;=\; (x-(1+2\mathrm{i}))(x-(1-2\mathrm{i}))(x-1)^2$.
Wir stellen fest, dass der Nenner kleineren Grad hat als der Zähler.
Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{8(x^2+5)}{(x^2-2x+5)(x-1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x-(1+2\mathrm{i})} + \frac{B}{x-(1-2\mathrm{i})} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

an. Multiplikation mit $(x-(1+2\mathrm{i}))(x-(1-2\mathrm{i}))(x-1)^2$ ergibt

$$\begin{aligned}
8(x^2+5) &\overset{!}{=} \; A(x-(1-2\mathrm{i}))(x-1)^2 + B(x-(1+2\mathrm{i}))(x-1)^2 \\
&\quad +C(x^2-2x+5)(x-1) + D(x^2-2x+5) \\
&= \; A(x^3+(-3+2\mathrm{i})x^2+(3-4\mathrm{i})x+(-1+2\mathrm{i})) \\
&\quad +B(x^3+(-3-2\mathrm{i})x^2+(3+4\mathrm{i})x+(-1-2\mathrm{i})) \\
&\quad +C(x^3-3x^2+7x-5) + D(x^2-2x+5)\,.
\end{aligned}$$

Nach Sortierung der Potenzen von x erhalten wir

$$\begin{aligned}
8x^2+40 &\overset{!}{=} \; x^3(A+B+C) \\
&\quad +x^2((-3+2\mathrm{i})A+(-3-2\mathrm{i})B-3C+D) \\
&\quad +x((3-4\mathrm{i})A+(3+4\mathrm{i})B+7C-2D) \\
&\quad +((-1+2\mathrm{i})A+(-1-2\mathrm{i})B-5C+5D)\,.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
A+B+C &= 0 && \text{(Koeffizient bei } x^3\text{)} \\
(-3+2\mathrm{i})A+(-3-2\mathrm{i})B-3C+D &= 8 && \text{(Koeffizient bei } x^2\text{)} \\
(3-4\mathrm{i})A+(3+4\mathrm{i})B+7C-2D &= 0 && \text{(Koeffizient bei } x^1\text{)} \\
((-1+2\mathrm{i})A+(-1-2\mathrm{i})B-5C+5D &= 40 && \text{(Koeffizient bei } x^0\text{)}
\end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3+2\mathrm{i} & -3-2\mathrm{i} & -3 & 1 & 8 \\ 3-4\mathrm{i} & 3+4\mathrm{i} & 7 & -2 & 0 \\ -1+2\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & -5 & 5 & 40 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & 1 & 8 \\ -4\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 4 & -2 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -4 & 5 & 40 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 32 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 48 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4\mathrm{i} & 0 & 0 & -4+8\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

Also ist $A=-2+\mathrm{i}$, $B=-2-\mathrm{i}$, $C=4$ und $D=12$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \tfrac{8(x^2+5)}{(x^2-2x+5)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \tfrac{-2+\mathrm{i}}{x-(1+2\mathrm{i})} + \tfrac{-2-\mathrm{i}}{x-(1-2\mathrm{i})} + \tfrac{4}{x-1} + \tfrac{12}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 -2\left(\tfrac{1}{x-(1+2\mathrm{i})} + \tfrac{1}{x-(1-2\mathrm{i})}\right) + \left(\tfrac{\mathrm{i}}{x-(1+2\mathrm{i})} - \tfrac{\mathrm{i}}{x-(1-2\mathrm{i})}\right) + \tfrac{4}{x-1} + \tfrac{12}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \Bigg[-2\ln((x-1)^2+4) - 2\arctan\big(\tfrac{x-1}{2}\big) + 4\ln(x-1) - \tfrac{12}{x-1}\Bigg]_2^3 \\
&= (-2\ln(8) - 2\arctan(1) + 4\ln(2) - 6) - \big(-2\ln(5) - 2\arctan\big(\tfrac{1}{2}\big) - 12\big) \\
&= -6\ln(2) - 2\cdot\frac{\pi}{4} + 4\ln(2) - 6 + 2\ln(5) + 2\arctan\big(\tfrac{1}{2}\big) + 12 \\
&= 6 + 2\ln(5) + 2\arctan\big(\tfrac{1}{2}\big) - 2\ln(2) - \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 74

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

(b) Ist $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)} \leqslant 0$ für $x \in [1,+\infty[$?

(c) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+2}{k^3(k+1)}$?

Lösung.

(a) Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)} \overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x+1)}$$

an. Multiplikation mit $x^3(x+1)$ ergibt

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &\overset{!}{=} A(x^3+x^2) + B(x^2+x) + C(x+1) + Dx^3 \\ &= x^3(A+D) + x^2(A+B) + x(B+C) + C\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+D &= 0 \quad (\text{Koeffizient bei } x^3) \\ A+B &= 1 \quad (\text{Koeffizient bei } x^2) \\ B+C &= 2 \quad (\text{Koeffizient bei } x^1) \\ C &= 2 \quad (\text{Koeffizient bei } x^0) \end{aligned}$$

mit Lösung $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$ und $D = -1$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{v\to+\infty} \int_1^{v} \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{v\to+\infty} \left[\ln(x) - \frac{1}{x^2} - \ln(x+1)\right]_1^v \\ &= \lim_{v\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2}\right]_1^v \\ &= \lim_{v\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) - \frac{1}{x^2}\right]_1^v \\ &= \lim_{v\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{v}}\right) - \frac{1}{v^2} - \ln(\tfrac{1}{2}) + 1\right) \\ &= 1 + \ln(2)\,. \end{aligned}$$

(b) Für $x \in [1, +\infty[$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{(x+1)}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-x^2(x+1)^2-6(x+1)^2+x^4}{x^4(x+1)^2} \\
&= \frac{-x^4-2x^3-x^2-6(x+1)^2+x^4}{x^4(x+1)^2} \\
&= -\frac{2x^3+x^2+6(x+1)^2}{x^4(x+1)^2} \\
&\leqslant 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Wir wollen das Integralkriterium auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2k+2}{k^3(k+1)}$ anwenden.

Dazu müssen wir zeigen, dass $\dfrac{x_1^2+2x_1+2}{x_1^3(x_1+1)} \geqslant \dfrac{x_2^2+2x_2+2}{x_2^3(x_2+1)} \geqslant 0$ ist für $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Es ist dort $\dfrac{x_2^2+2x_2+2}{x_2^3(x_2+1)} \geqslant 0$. Nach (b) ist $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)} \leqslant 0$ für $x \in [1, +\infty[$.

Damit gilt nach §4.6.6. die Ungleichung $\dfrac{x_1^2+2x_1+2}{x_1^3(x_1+1)} \geqslant \dfrac{x_2^2+2x_2+2}{x_2^3(x_2+1)}$ für $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Also können wir das Integralkriterium anwenden und folgenden Schluss ziehen:
Da $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2k+2}{k^3(k+1)}$ konvergent.

Es ist $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = 1+\ln(2) \approx 1{,}6931$.

Es ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2k+2}{k^3(k+1)} \approx 3{,}4041$. Einen genauen Wert können wir nicht berechnen.

Hausaufgabe 75

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-2k^2}$ auf Konvergenz.

(c) Untersuchen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\ln(x))\exp(-x)\,\mathrm{d}x$ auf Konvergenz.

Lösung.

(a) *Fall* 1: $t = 0$. Es ist

$$\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-0\cdot x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty}\int_1^v x\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^v = +\infty\,.$$

Fall 2: $t \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to+\infty}\int_1^v x\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{v\to+\infty}\int_t^{tv^2} x\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{1}{2tx}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2t}\lim_{v\to+\infty}\int_t^{tv^2} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2t}\lim_{v\to+\infty}\big[-\mathrm{e}^{-u}\big]_t^{tv^2} \\
&= \frac{1}{2t}\lim_{v\to+\infty}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-tv^2}) \\
&= \frac{1}{2t}(\mathrm{e}^{-t}-\lim_{v\to+\infty}\mathrm{e}^{-tv^2}) \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-0}{2t} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2t} & \text{falls } t > 0 \\ \dfrac{1}{2t}(\mathrm{e}^{-t}-(+\infty)) = +\infty & \text{falls } t < 0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty & \text{falls } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2t} & \text{falls } t > 0\,. \end{cases}$

(b) Wir wollen das Integralkriterium auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-2k^2}$ anwenden.

Dazu müssen wir zeigen, dass $x_1\mathrm{e}^{-2x_1^2} \geqslant x_2\mathrm{e}^{-2x_2^2} \geqslant 0$ ist für $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Es ist dort $x_2\mathrm{e}^{-2x_2^2} \geqslant 0$.

Wir zeigen nun, dass für $x \geqslant 1$ die Ungleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\mathrm{e}^{-2x^2} \leqslant 0$ gilt.

Für $x \geqslant 1$ ist in der Tat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\mathrm{e}^{-2x^2} \;=\; \mathrm{e}^{-2x^2} + x\mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4x) \;=\; (1-4x^2)\cdot \mathrm{e}^{-2x^2} \leqslant 0\,.$$

Also können wir das Integralkriterium anwenden und folgenden Schluss ziehen: Da $\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-2k^2}$ konvergent.

Es ist $\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} \approx 0{,}0338$.
Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-2k^2} \approx 0{,}1360$. Einen genauen Wert können wir nicht berechnen.

(c) Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$, also jedenfalls für $x \in [1,+\infty[$, ist $|\cos(\ln(x))\exp(-x)| \leqslant \exp(-x)$.
Außerdem ist

$$\int_1^{+\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{v\to\infty} \int_1^{v} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{v\to\infty} [-\exp(-x)]_1^v \;=\; \mathrm{e}^{-1}.$$

Also ist $\int_1^{+\infty} \cos(\ln(x))\exp(-x)\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Es ist $\int_1^{+\infty} \cos(\ln(x))\exp(-x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}2804$. Einen genauen Wert können wir nicht berechnen.

Hausaufgabe 76 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := \mathrm{e}^{xz}\sin(y)\,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla_f(x,y,z)$.

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$.

(c) Gegeben seien Funktionen $g,\ h\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen existieren.

Verifizieren Sie: Für $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\nabla_{g+h}(x_1,x_2) \ = \ \nabla_g(x_1,x_2) + \nabla_h(x_1,x_2)$$

und

$$\mathrm{H}_{g+h}(x_1,x_2) \ = \ \mathrm{H}_g(x_1,x_2) + \mathrm{H}_h(x_1,x_2)\ .$$

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) \ = \ \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \exp(xz)\sin(y)z \\ \exp(xz)\cos(y) \\ \exp(xz)\sin(y)x \end{pmatrix}$.

(b) Es ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \ = \ \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \exp(xz)\sin(y)z^2 & \exp(xz)\cos(y)z & \exp(xz)\sin(y)(xz+1) \\ \exp(xz)\cos(y)z & -\exp(xz)\sin(y) & \exp(xz)\cos(y)x \\ \exp(xz)\sin(y)(xz+1) & \exp(xz)\cos(y)x & \exp(xz)\sin(y)x^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $i \in \{1,2\}$ gilt

$$(g+h)_{x_i}(x_1,x_2) \ = \ g_{x_i}(x_1,x_2) + h_{x_i}(x_1,x_2).$$

Also ist $\nabla_{g+h}(x_1,x_2) \ = \ \nabla_g(x_1,x_2) + \nabla_h(x_1,x_2)$ für $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Für $i,j \in \{1,2\}$ gilt

$$\begin{aligned} (g+h)_{x_ix_j}(x_1,x_2) \ &= \ ((g+h)_{x_i})_{x_j}(x_1,x_2) \\ &= \ (g_{x_i} + h_{x_i})_{x_j}(x_1,x_2) \\ &= \ (g_{x_i})_{x_j}(x_1,x_2) + (h_{x_i})_{x_j}(x_1,x_2) \\ &= \ g_{x_ix_j}(x_1,x_2) + h_{x_ix_j}(x_1,x_2)\,. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{H}_{g+h}(x_1,x_2) \ = \ \mathrm{H}_g(x_1,x_2) + \mathrm{H}_h(x_1,x_2)$ für $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.