Mathematatik 2 für inf, swt, msv

# Lösung 20

## Lösungen zu den Hausaufgaben

**Hausaufgabe 77** Gegeben ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x \left((x-2)(4z-z^2) + x(y+1)^2\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von $f$.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, die in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ liegt, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

*Lösung.*

(a) Eine direkte Rechnung ergibt

$$\nabla_f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} (x-1)(4z-z^2) + (x+1)(y+1)^2 \\ 2x(y+1) \\ 2(x-2)(2-z) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} x(4z-z^2) + (x+2)(y+1)^2 & 2(x+1)(y+1) & 2(x-1)(2-z) \\ 2(x+1)(y+1) & 2x & 0 \\ 2(x-1)(2-z) & 0 & -2(x-2) \end{pmatrix}.$$

(b) Aus der Bedingung $\nabla_f(x, y, z) = 0$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \cdot \left((x-1)(4z-z^2) + (x+1)(y+1)^2\right) &= 0 \\ \mathrm{e}^x \cdot 2x(y+1) &= 0 \\ \mathrm{e}^x \cdot 2(x-2)(2-z) &= 0 \end{aligned}$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\mathrm{e}^x \neq 0$ ist, können wir durch diesen Faktor teilen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir damit $x(y+1) = 0$. Dies führt auf die folgenden Fälle.

*Fall* $x = 0$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $-4(2-z) = 0$ und damit $z = 2$. Setzen wir beides in die erste Gleichung ein, erhalten wir $-4 + (y+1)^2 = 0$, sodass entweder $y = -3$ oder $y = 1$ ist. Insgesamt erhalten wir in diesem Fall die Flachstellen $(0, -3, 2)$ und $(0, 1, 2)$.

*Fall* $x \neq 0$. Hier folgt aus der Gleichung $x(y+1) = 0$, dass $y = -1$ sein muss. Die dritte Gleichung $(x-2)(2-z) = 0$ führt auf die zwei Subfälle $x = 2$ oder $z = 2$.

*Subfall* $x = 2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $4z - z^2 = 0$ und damit entweder $z = 0$ oder $z = 4$.

*Subfall* $z = 2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $4(x-1) = 0$ und damit $x = 1$.

Insgesamt erhalten wir in diesem Fall die Flachstellen $(2,-1,0)$, $(2,-1,4)$ und $(1,-1,2)$. Zusammen besitzt $f$ also die folgenden fünf Flachstellen.

$$(0,-3,2), \qquad (0,1,2), \qquad (1,-1,2), \qquad (2,-1,0), \qquad (2,-1,4)$$

(c) Von den fünf Flachstellen aus Teil (b) liegen die folgenden zwei in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

$$(1,-1,2), \qquad (2,-1,4)$$

Diese Flachstellen setzen wir jeweil in die Hesssematrix von $f$ ein.

$$\mathrm{H}_f(1,-1,2) = \mathrm{e}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(2,-1,4) = \mathrm{e}^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

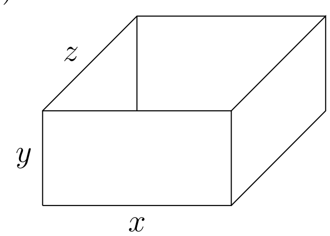
Die Matrix $\mathrm{H}_f(1,-1,2)$ besitzt die Eigenwerte 2 und 4 und ist damit positiv definit. Also ist die Flachstelle $(1,-1,2)$ eine lokale Minimalstelle.

Für die Matrix $\mathrm{H}_f(2,-1,4)$ gilt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{H}_f(2,-1,4)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$, also kann sie weder positiv definit noch negativ definit sein. Wegen $\det(\mathrm{H}_f(2,-1,4)) = -64\mathrm{e}^6 \neq 0$ ist damit $\mathrm{H}_f(2,-1,4)$ indefinit. Also ist die Flachstelle $(2,-1,4)$ eine Sattelstelle.

**Hausaufgabe 78** In einem Freibad wird ein neues quaderförmiges Becken errichtet. Dieses hat Breite $x$, Höhe $y$ und Länge $z$. Hierbei seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Maßeinheit ist Meter.
Außenwandfläche und Bodenfläche sollen zusammen möglichst klein werden, um die Kosten zu minimieren. Außenwandfläche und Bodenfläche betragen zusammen $f(x,y,z) := 2xy+2yz+xz$.
Als Kapazitätsvorgabe muss das Volumen des Beckens genau $500\,\mathrm{m}^3$ betragen. Das Volumen ist $xyz$. Also muss mit $g(x,y,z) := xyz - 500$ die Bedingung $g(x,y,z) = 0$ erfüllt sein.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Ist die Flachstelle aus (a) eine lokale Minimalstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$?




*Lösung.*

(a) Als Vorbereitung berechnen wir die Gradienten von $f$ und $g$.

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y+z \\ 2x+2z \\ x+2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Wir suchen alle Lösungen des Lagrange-Gleichungssystems zur Nebenbedingung $g = 0$.

$$\begin{aligned} 2y + z &= \lambda_1 \cdot yz \\ 2x + 2z &= \lambda_1 \cdot xz \\ x + 2y &= \lambda_1 \cdot xy \\ xyz - 500 &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $x,\, y,\, z \in \mathbb{R}_{>0}$ können wir die ersten drei Gleichungen mit $x$, $y$ beziehungsweise $z$ durchmultiplizieren.

$$\begin{aligned} 2xy + xz &= \lambda_1 \cdot xyz \\ 2xy + 2yz &= \lambda_1 \cdot xyz \\ xz + 2yz &= \lambda_1 \cdot xyz. \end{aligned}$$

Aus der Differenz der ersten beiden Gleichungen erhalten wir $xz - 2yz = 0$ und damit $x = 2y$ wegen $z > 0$. Aus der Differenz der letzten beiden Gleichungen erhalten wir $2xy - xz = 0$ und damit $z = 2y$ wegen $x > 0$. Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt $4y^3 = 500$ und damit $y = 5$. Die Gleichung $2y + z = \lambda_1 \cdot yz$ wird damit zu $10 + 10 = \lambda_1 \cdot 50$. Daraus folgt noch $\lambda_1 = \frac{2}{5}$.

Also ist $(10, 5, 10)$ die gesuchte Flachstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Aus Teil (a) wissen wir, dass $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ die Gleichung

$$\nabla_f(10,5,10) = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \nabla_g(10,5,10)$$

für die Flachstelle $(10, 5, 10)$ löst.

Wir benötigen außerdem die Hessematrizen von $f$ und $g$.

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;:\; \begin{pmatrix} 50 & 100 & 50 \end{pmatrix} u = 0 \,\}$. Das Gaußverfahren liefert die Basis $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Diese schreiben wir als Matrix

$$U := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als weitere Vorbereitung setzen wir noch

$$H := \mathrm{H}_f(10,5,10) - \lambda_1 \cdot \mathrm{H}_g(10,5,10) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die zu untersuchende Matrix bestimmen.

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist diese Matrix positiv definit, denn es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) &= 8 \\ \mathrm{M}_2(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) &= 12. \end{aligned}$$

Also ist $(10, 5, 10)$ eine lokale Minimalstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

*Alternative Lösung.* Wir können auch zuerst die Nebenbedingung nach $z$ auflösen, also $z = \frac{500}{xy}$. Dies ist möglich, da $x,\, y,\, z \in \mathbb{R}_{>0}$. Einsetzen in $f$ gibt eine neue Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2xy + \frac{1000}{x} + \frac{500}{y}.$$

Nun liefert eine lokale Extremstelle $(\hat{x}, \hat{y})$ von $\tilde{f}$ auch eine lokale Extremstelle $(\hat{x}, \hat{y}, \frac{500}{\hat{x}\hat{y}})$ von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

Wir bestimmen zunächst den Gradienten und die Hessematrix von $\tilde{f}$.

$$\nabla_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - \frac{1000}{x^2} \\ 2x - \frac{500}{y^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2000}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{1000}{y^3} \end{pmatrix}$$

Mit der Bedingung $\nabla_{\tilde{f}}(x, y) = 0$ erhalten wir $y = \frac{500}{x^2}$ aus der ersten Gleichung. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $2x - \frac{x^4}{500} = 0$, also $2 = \frac{x^3}{500}$ wegen $x > 0$. Aus $x^3 = 1000$ folgt nun $x = 10$ und $y = \frac{500}{100} = 5$. Damit ist $(10, 5)$ eine Flachstelle von $f$. Dies ergibt die gesuchte Flachstelle $(10, 5, \frac{500}{50}) = (10, 5, 10)$ von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

Wir setzen die Flachstelle von $\tilde{f}$ in die Hessematrix von $\tilde{f}$ ein.

$$\mathrm{H}_{\tilde{f}}(10, 5) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit, denn es ist

$$\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_{\tilde{f}}(10, 5)) = 2$$
$$\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_{\tilde{f}}(10, 5)) = 12.$$

Also ist $(10, 5)$ eine lokale Minimalstelle von $\tilde{f}$. Damit ist $(10, 5, 10)$ eine lokale Minimalstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

**Hausaufgabe 79** Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto -x^2+y(5x+2z)+4z^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 12,\ xy - z^2)$.

(a) Geben Sie das Lagrange-Gleichungssystem für $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $(2, 2, -2)$ eine Flachstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$ ist. Ist $(2, 2, -2)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$?

*Lösung.* Wir bestimmen zunächst die Gradienten von $f$, $g_1$ und $g_2$.

$$\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 5x + 2z \\ 2y + 8z \end{pmatrix}, \qquad \nabla_{g_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \nabla_{g_2}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -2z \end{pmatrix}$$

Außerdem werden wir die Hessematrizen benötigen.

$$\mathrm{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_{g_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_{g_2}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Mit den Gradienten von oben erhalten wir das folgende Lagrange-Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} -2x + 5y &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot y \\ 5x + 2z &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot x \\ 2y + 8z &= \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 \cdot (-2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 &= 0 \\ xy - z^2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Einsetzen von $(2, 2, -2)$ in das Gleichungssystem aus (a) ergibt

$$\begin{aligned} -4 + 10 &= \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 2 \\ 10 - 4 &= \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 2 \\ 4 - 16 &= \lambda_1 \cdot (-4) + \lambda_2 \cdot 4 \\ 4 + 4 + 4 - 12 &= 0 \\ 4 - 4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $(2, 2, -2)$ mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ eine Lösung des Lagrange-Gleichungssystems. Weiterhin gilt, dass das Spaltentupel von

$$N(2, 2, -2) := (\nabla_{g_1}(2, 2, -2),\ \nabla_{g_2}(2, 2, -2)) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ -4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

linear unabhängig ist. Also ist $(2, 2, -2)$ eine Flachstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

Es bleibt die Entscheidung zu treffen, ob $(2, 2, -2)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Dazu bestimmen wir zunächst eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,:\, \left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$. Wir können $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ wählen und schreiben dies als Matrix

$$U := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Als weitere Vorbereitung setzen wir noch

$$H := \mathrm{H}_f(2,2,-2) - \lambda_1 \cdot \mathrm{H}_{g_1}(2,2,-2) - \lambda_2 \cdot \mathrm{H}_{g_2}(2,2,-2) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{smallmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Damit können wir die zu untersuchende Matrix bestimmen.

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -22 \end{smallmatrix}\right)$$

Diese Matrix ist negativ definit. Also ist $(2,2,-2)$ eine lokale Maximalstelle von $f$ unter Nebenbedingung $g = 0$.

**Hausaufgabe 80**

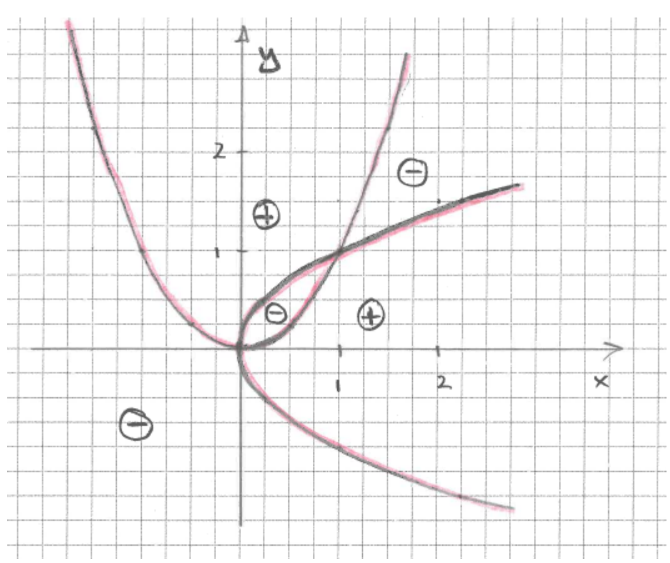
(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x^2 - y)(x - y^2)$.
Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) = 0 \,\}$ von $f$.
Markieren Sie darin mit „+“ die Bereiche, in denen $f$ positive Funktionswerte hat.
Markieren Sie darin mit „−“ die Bereiche, in denen $f$ negative Funktionswerte hat.

Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1,1)$ eine lokale Extremstelle von $f$ ist.

(b) Sei $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x,y,z,w) \mapsto -2x^2 z + x + y - y^2(w^2+1) + z^4 - (2z-1)^2$.
Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine Flachstelle von $h$ ist. Ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von $h$?

*Lösung.*

(a) Es ist $f(x,y) = 0$ genau dann, wenn entweder $y = x^2$ oder $x = y^2$ ist. Dies führt zu folgender Skizze. Dabei ist die Nullstellenmenge rot eingezeichnet. Die Bereiche, in denen $f$ positiven oder negativen Funktionswert hat, sind durch diese Nullstellenmenge begrenzt.



Die Stelle $(1,1)$ ist eine Nullstelle von $f$. Anhand der Skizze sehen wir, dass in einer Umgebung von $(1,1)$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte liegen. Damit kann $(1,1)$ weder eine lokale Maximalstelle noch eine lokale Minimalstelle sein.

Die Stelle $(1,1)$ ist eine Sattelstelle: Die Tangentialebene in diesem Punkt enthält die Nullstellenlinien und verläuft deshalb horizontal. Es liegt also eine Flachstelle vor. Aber kein lokales Extremum, wie eben gesehen.

(b) Wir bestimmen zunächst den Gradienten von $h$.

$$\nabla_h(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} -4xz+1 \\ 1-2y(w^2+1) \\ -2x^2+4z^3-4(2z-1) \\ -2y^2w \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ergibt $\nabla_h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine Flachstelle von $h$.

Um zu entscheiden, ob $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von $h$ ist, bestimmen wir die Hessematrix von $h$.

$$\mathrm{H}_h(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} -4z & 0 & -4x & 0 \\ 0 & -2(w^2+1) & 0 & -4yw \\ -4x & 0 & 12z^2-8 & 0 \\ 0 & -4yw & 0 & -2y^2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ergibt

$$\mathrm{H}_h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir benutzen das Hauptminorenkriterium. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(\mathrm{H}_h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)) &= -2 \\ \mathrm{M}_2(\mathrm{H}_h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)) &= 4 \\ \mathrm{M}_3(\mathrm{H}_h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)) &= -12 \\ \mathrm{M}_4(\mathrm{H}_h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)) &= 6\,. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{H}_h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ negativ definit und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ist eine lokale Maximalstelle.