Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 21

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 81

(a) Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Bestätigen Sie, dass

$$y(x) = a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist.

$$y'' + \frac{y'}{2x} - \frac{y}{x} \;=\; 0$$

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $y(4) = 4$ und $y'(4) = 1$.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung mit $y'(1) = \mathrm{e}^2$ und $y(4) = 1$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^{-\frac{1}{2}}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) \\ y''(x) &= -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) + x^{-1}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ wird damit

$$\begin{aligned} y''(x) + \frac{y'(x)}{2x} - \frac{y(x)}{x} &= -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) + x^{-1}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) - x^{-1}\left(a\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + b\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Die Anfangsbedingungen ergeben das folgende $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcccc} y(4) & = & a\mathrm{e}^4 + b\mathrm{e}^{-4} & \stackrel{!}{=} & 4 \\ y'(4) & = & \tfrac{1}{2}a\mathrm{e}^4 - \tfrac{1}{2}b\mathrm{e}^{-4} & \stackrel{!}{=} & 1 \end{array}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^{-4} & 4 \\ \mathrm{e}^4 & -\mathrm{e}^{-4} & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^{-4} & 4 \\ 0 & -2\mathrm{e}^{-4} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^{-4} & 4 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & 0 & 3 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3\mathrm{e}^{-4} \\ 0 & 1 & \mathrm{e}^4 \end{array}\right)$$

Damit ist $a = 3\mathrm{e}^{-4}$ und $b = \mathrm{e}^4$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = 3\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + \mathrm{e}^4\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}} = 3\mathrm{e}^{-4+2\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{4-2\sqrt{x}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $y(4) = 4$ und $y'(4) = 1$.

(c) Die gestellten Bedingungen ergeben das folgende $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcccl} y'(1) & = & a\mathrm{e}^2 - b\mathrm{e}^{-2} & \stackrel{!}{=} & \mathrm{e}^2 \\ y(4) & = & a\mathrm{e}^4 + b\mathrm{e}^{-4} & \stackrel{!}{=} & 1 \end{array}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^{-4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & -1 & \mathrm{e}^4 \\ \mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^{-4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & -1 & \mathrm{e}^4 \\ 0 & 1+\mathrm{e}^{-4} & 1-\mathrm{e}^4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & -1 & \mathrm{e}^4 \\ 0 & 1 & \frac{1-\mathrm{e}^4}{1+\mathrm{e}^{-4}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^4 & 0 & \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-4}} \\ 0 & 1 & \frac{1-\mathrm{e}^4}{1+\mathrm{e}^{-4}} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2\mathrm{e}^{-4}}{1+\mathrm{e}^{-4}} \\ 0 & 1 & \frac{1-\mathrm{e}^4}{1+\mathrm{e}^{-4}} \end{array}\right)$$

Damit ist $a = \dfrac{2\mathrm{e}^{-4}}{1+\mathrm{e}^{-4}}$ und $b = \dfrac{1-\mathrm{e}^4}{1+\mathrm{e}^{-4}}$.
Insgesamt ist also

$$y(x) = \frac{2\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + (1-\mathrm{e}^4)\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{1+\mathrm{e}^{-4}} = \frac{2\mathrm{e}^{-4+2\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-2\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{4-2\sqrt{x}}}{1+\mathrm{e}^{-4}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit $y'(1) = \mathrm{e}^2$ und $y(4) = 1$.

Hausaufgabe 82 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{2}(x^2 - 2)(y - 1)$ für $x \in \mathbb{R}$.

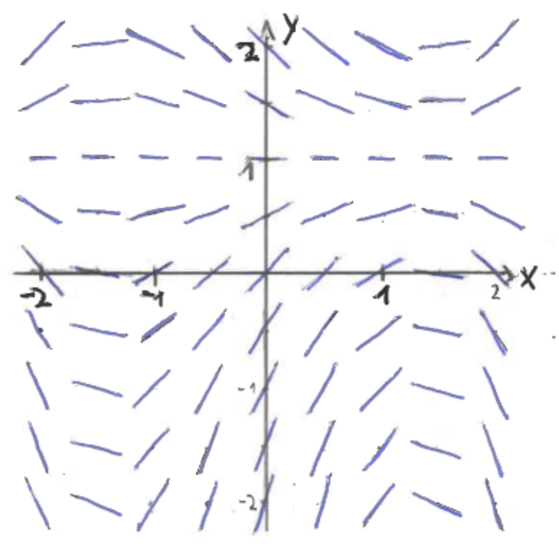
(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.
Skizzieren Sie den Graphen dieser Lösung ins Richtungsfeld.

Lösung.

(a) Die Skizze zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.



(b) Wir haben die konstante Lösung $y(x) = 1$.
Sei $y \neq 1$. Dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu $\dfrac{y'}{y-1} = x^2 - 2$.
Wir haben also die Gleichung

$$\int \frac{2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int x^2 - 2\,\mathrm{d}x$$

zu lösen.
Einerseits ist $\int \frac{2}{y-1}\,\mathrm{d}y = [2\ln(|y-1|)]$. Andererseits ist $\int x^2 - 2\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3 - 2x]$.
Damit ist, für ein $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2\ln(|y-1|) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x + c \\ \Leftrightarrow \quad |y-1| &= \exp\bigl(\tfrac{1}{6}x^3 - x + \tfrac{c}{2}\bigr) \end{aligned}$$

Also ist $y - 1 = \exp(c/2)\exp\bigl(\frac{1}{6}x^3 - x\bigr)$ oder $y - 1 = -\exp(c/2)\exp\bigl(\frac{1}{6}x^3 - x\bigr)$
Es können $\exp(c/2)$ oder $-\exp(c/2)$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen.

Somit wird $y = 1 + d\exp\left(\frac{1}{6}x^3 - x\right)$ für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $d = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $y(x) = 1$.

Also sind alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = 1 + d\exp\left(\frac{1}{6}x^3 - x\right) \quad \text{mit } d \in \mathbb{R}.$$

Wir machen eine Probe. Für $x \in \mathbb{R}$ wird

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 1\right)d\exp\left(\frac{1}{6}x^3 - x\right) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2)(y(x) - 1) \end{aligned}$$

Also ist überprüft, dass $y(x) = 1 + d\exp\left(\frac{1}{6}x^3 - x\right)$ für $d \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

(c) Die Anfangsbedingung führt zu

$$0 \overset{!}{=} 1 + d\exp(0) = 1 + d.$$

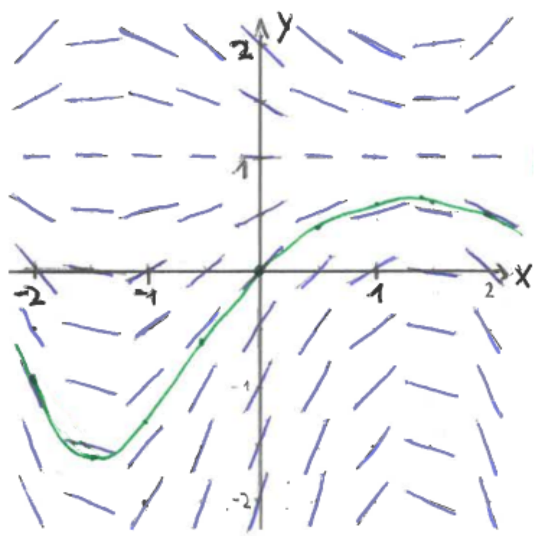
Also ist $d = -1$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = 1 - \exp\left(\frac{1}{6}x^3 - x\right)$$

eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Die folgende Skizze zeigt den Graphen der soeben bestimmenten Lösung im Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.



Hausaufgabe 83

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2}}{3y}$ mit Anfangsbedingung $y(1) = -1$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = y(y+1)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 2$.
Gibt es auch eine Lösung mit $y(0) = 0$?

Lösung.

(a) Die Differentialgleichung ist äquivalent zu $y' \cdot 3y \cdot \mathrm{e}^{y^2} = 1$.
Wir haben also die Gleichung
$$\int 3y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int 1\,\mathrm{d}x$$
zu lösen.
Einerseits ist $\int 1\,\mathrm{d}x = [x]$.
Andererseits substituieren wir $u = y^2$ und erhalten
$$\int 3y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \tfrac{3}{2}[\mathrm{e}^u] = \tfrac{3}{2}[\mathrm{e}^{y^2}].$$
Damit ist
$$\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{y^2} = x + c$$
für ein $c \in \mathbb{R}$. Also ist $y^2 = \ln(\frac{2}{3}(x+c))$.
Also ist
$$y = y(x) = \sqrt{\ln(\tfrac{2}{3}(x+c))}$$
oder
$$y = y(x) = -\sqrt{\ln(\tfrac{2}{3}(x+c))}$$
für ein $c \in \mathbb{R}$.
Die Anfangsbedingung $y(1) = -1$ führt zu
$$-1 \overset{!}{=} y(1) = -\sqrt{\ln(\tfrac{2}{3}(1+c))}\,.$$
Also ist $1 = \ln(\frac{2}{3}(1+c))$ und damit $c = \frac{3}{2}\mathrm{e} - 1$.
Insgesamt ist
$$y(x) = -\sqrt{\ln(\tfrac{2}{3}(x + \tfrac{3}{2}\mathrm{e} - 1))} = -\sqrt{\ln(\tfrac{2}{3}x + \mathrm{e} - \tfrac{2}{3})}$$
eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = -1$.
Wir machen eine Probe.
Einerseits ist
$$y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\ln(\frac{2}{3}x + \mathrm{e} - \frac{3}{2}))}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}x + \mathrm{e} - \frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3y(x)\cdot(\frac{2}{3}x + \mathrm{e} - \frac{3}{2})}\,.$$

Andererseits ist
$$\frac{\mathrm{e}^{-y(x)^2}}{3y(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\ln(\frac{2}{3}x+\mathrm{e}-\frac{3}{2})}}{3y(x)} = \frac{1}{3y(x)\cdot(\frac{2}{3}x+\mathrm{e}-\frac{3}{2})}\,.$$
Das ist dasselbe. Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Außerdem ist $y(1) = -\sqrt{\ln(\mathrm{e})} = -1$. Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.

(b) Wir haben die konstanten Lösungen $y(x) = 0$ und $y(x) = -1$.

Sei $y(x) \neq 0$ und $y(x) \neq -1$ als Funktionen. Dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu $\dfrac{y'}{y(y+1)} = 1$.

Wir haben also die Gleichung
$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int 1\,\mathrm{d}x$$
zu lösen.

Einerseits ist $\int 1\,\mathrm{d}x = [x]$.

Andererseits ist
$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = [\ln(|y|) - \ln(|y+1|)] = \left[\ln(|\tfrac{y}{y+1}|)\right].$$
Für ein $c \in \mathbb{R}$ ist damit
$$\begin{aligned} \ln(|\tfrac{y}{y+1}|) &= x + c\,, \\ \text{was äquivalent ist zu} \quad \left|\frac{y}{y+1}\right| &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^c\,. \end{aligned}$$
Dies ergibt $\frac{y}{y+1} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^c$ oder $\frac{y}{y+1} = -\mathrm{e}^x\mathrm{e}^c$.

Es können e^c oder $-\mathrm{e}^c$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen.

Somit wird $\frac{y}{y+1} = d\mathrm{e}^x$ für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es ist
$$\begin{aligned} & \frac{y}{y+1} &= d\mathrm{e}^x \\ \Longleftrightarrow \quad & y &= (y+1)d\mathrm{e}^x \\ \Longleftrightarrow \quad & y &= \frac{d\mathrm{e}^x}{1-d\mathrm{e}^x} \\ \Longleftrightarrow \quad & y &= \frac{1}{d\mathrm{e}^{-x}-1}\,. \end{aligned}$$
Für $d = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $y(x) = -1$.

Also sind alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form
$$y(x) = 0 \quad \text{oder} \quad y(x) = \frac{1}{d\mathrm{e}^{-x}-1} \quad \text{mit } d \in \mathbb{R}.$$
Nun bestimmen wir eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Für $y(x) = 0$ ist $y(0) = 0$. Also ist die gesuchte Lösung von der Form $y(x) = \dfrac{1}{d\mathrm{e}^{-x} - 1}$.
Die Anfangsbedingung führt auf die Gleichung

$$y(0) = \frac{1}{d-1} \stackrel{!}{=} 2$$

Insbesondere ist $d \neq 1$. Es ist

$$\frac{1}{d-1} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad d - 1 = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{3}{2}\,.$$

Insgesamt ist also

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1} \;=\; \frac{2}{3\mathrm{e}^{-x} - 2}$$

eine Lösung von $y' = y(y+1)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

> Unsere Rechnung zeigt auch, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung zur gestellten Anfangsbedingung ist.

Wir machen eine Probe.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}}{(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1)^2} \\
y(x)(y(x)+1) &= \frac{1}{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1} \cdot \frac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}}{(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} - 1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Außerdem ist $y(0) = \dfrac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2$. Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.

Die konstante Lösung $y(x) = 0$ ist eine Lösung mit $y(0) = 0$.

> Unsere Rechnung zeigt auch, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ist.

Hausaufgabe 84

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{e}^{-2y/x}$ mit Anfangsbedingung $y(-1) = \sqrt{3}$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ mit Anfangsbedingung $y(\mathrm{e}) = -3\mathrm{e}$.

Lösung.

(a) Wir substituieren $y(x) = u(x) \cdot x$ und erhalten wegen $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$, also $y' = u'x + u$, die folgende Differerentialgleichung für u.

$$u'x + u = u + \mathrm{e}^{-2u}$$

Das stellen wir um zu

$$\mathrm{e}^{2u}u' = \frac{1}{x}\,.$$

Wir haben also die Gleichung

$$\int \mathrm{e}^{2u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

zu lösen.

Einerseits ist $\int \mathrm{e}^{2u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2u}\right]$. Andererseits ist $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)]$.

Für ein $c \in \mathbb{R}$ können wir dann erhalten

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2u} &= \ln(|x|) + c\,, \\ \text{was äquivalent ist zu} \quad u &= \tfrac{1}{2}\ln(2\ln(|x|) + 2c)\,. \end{aligned}$$

Also sind Lösungen der transformierten Differentialgleichung $u' = \dfrac{1}{x\mathrm{e}^{2u}}$ von der Form

$$u(x) = \frac{1}{2}\ln(2\ln(|x|) + 2c) \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Damit erhalten wir als Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{e}^{-2y/x}$ Funktionen von der Form

$$y(x) = \frac{x}{2}\ln(2\ln(|x|) + 2c) \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $y(-1) = \sqrt{3}$ führt zu

$$\sqrt{3} \stackrel{!}{=} y(-1) = -\frac{1}{2}\ln(2c).$$

Also $c = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = \frac{x}{2}\ln\Big(2\ln(|x|) + \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}\Big)$$

eine Lösung von $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{e}^{-2y/x}$ zur Anfangsbedingung $y(-1) = \sqrt{3}$.

Wir machen eine Probe.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}\ln\Big(2\ln(|x|)+\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}\Big)+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\ln(|x|)+\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}}\cdot\frac{2}{x} \\ &= \frac{y(x)}{x}+\frac{1}{2\ln(|x|)+\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}} \\ \frac{y(x)}{x}+\mathrm{e}^{-2y(x)/x} &= \frac{y(x)}{x}+\exp\Big(-\ln\Big(2\ln(|x|)+\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}\Big)\Big) \\ &= \frac{y(x)}{x}+\frac{1}{2\ln(|x|)+\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}}\,. \end{aligned}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Außerdem ist $y(-1) = -\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$. Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.

(b) Es ist $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\,.$

Wir substituieren $y(x) = u(x)\cdot x$ und erhalten wegen $y'(x) = u'(x)\cdot x + u(x)$, also $y' = u'x+u$, die folgende Differerentialgleichung für u.

$$u'x+u = \frac{1}{u}+u$$

Das stellen wir um zu

$$u\cdot u' = \frac{1}{x}\,.$$

Wir haben also die Gleichung

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

zu lösen.

Einerseits ist $\int u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right]$. Andererseits ist $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)]$.

Damit ist

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln(|x|)+c$$

für ein $c\in\mathbb{R}$. Also ist $u^2 = 2(\ln(|x|)+c)$.

Also ist

$$u = u(x) = \sqrt{2(\ln(|x|)+c)}$$

oder

$$u = u(x) = -\sqrt{2(\ln(|x|)+c)}$$

für ein $c\in\mathbb{R}$.

Für die ursprüngliche Gleichung gilt also

$$y = y(x) = x\sqrt{2(\ln(|x|)+c)}$$

oder

$$y = y(x) = -x\sqrt{2(\ln(|x|)+c)}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingung $y(\mathrm{e}) = -3\mathrm{e}$ führt zu

$$-3\mathrm{e} \stackrel{!}{=} y(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}\sqrt{2(\ln(|\mathrm{e}|) + c)} = -\mathrm{e}\sqrt{2(1+c)}.$$

Also ist $9 = 2(1+c)$ und damit $c = \frac{7}{2}$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = -x\sqrt{2\ln(|x|) + 7}$$

eine Lösung von $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ zur Anfangsbedingung $y(\mathrm{e}) = -3\mathrm{e}$.

Wir machen eine Probe.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\sqrt{2\ln(|x|) + 7} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\ln(|x|) + 7}} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)} \\ &= \frac{x^2 + y(x)^2}{xy(x)} \end{aligned}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Außerdem ist $y(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}\sqrt{2+7} = -3\mathrm{e}$. Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.