Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 22

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 85

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis jeweils mit einer Probe.

Lösung.

(a) Es hat $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$ die konstante Lösung $y(x) = 0$. Für $y \neq 0$ ist die Differentialgleichung separierbar und wir haben $\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ zu lösen. Wir erhalten

$$[\ln(|y|)] = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}].$$

Damit ist $\ln(|y|) = 2\sqrt{x} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, also $|y| = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{c}$.

Dies ergibt $y = \mathrm{e}^{c}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$ oder $y = (-\mathrm{e}^{c})\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$. Es können nun e^{c} und $-\mathrm{e}^{c}$ jeden Wert $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ annehmen. Zusammen mit der konstanten Lösung sind also alle Lösungen der der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ von der Form

$$y(x) = d \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

$$y'(x) = \frac{d \cdot 2\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{d \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}$$

(b) Aus Teil (a) kennen wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$. Es ist $y(x) = d \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$ für ein $d \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$ machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten: $y(x) = d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$. Dies führt auf folgende Gleichung.

$$\begin{array}{rrcl} & y'(x) & = & \frac{y(x)}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + \frac{d(x)\cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & = & \frac{d(x)\cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} & = & \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & d(x) & = & [x] \end{array}$$

Damit ist $d(x) = x + s$ mit $s \in \mathbb{R}$. Insgesamt sind alle Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ von der Form

$$y(x) = d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} = (x + s)\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$$

für ein $s \in \mathbb{R}$.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

$$y'(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + \frac{(x + s)\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}.$$

(c) Wir machen wieder den Ansatz der Variation der Konstanten mit der Lösung der homogenen Differentialgleichung aus Teil (a):

$$y(x) = d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$$

Dies führt auf folgende Gleichung.

$$\begin{array}{rrcl} & y'(x) & = & \frac{y(x)}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + \frac{d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & = & \frac{d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} & = & \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & d'(x) & = & \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \end{array}$$

Die Substitution $u(x) = \sqrt{x}$ mit $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ergibt das Integral

$$\begin{aligned} [d(x)] &= \int \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [2u(-\mathrm{e}^{-u})] - \int 2(-\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u \\ &= [-2u\mathrm{e}^{-u}] + [-2\mathrm{e}^{-u}] = [-2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})] \end{aligned}$$

und also $d(x) = -2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) + s$ mit $s \in \mathbb{R}$. Insgesamt sind daher alle Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ von der Form

$$y(x) = d(x) \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} = (-2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) + s)\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} = -2(1 + \sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + s \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$$

für ein $s \in \mathbb{R}$.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

Einerseits ist

$$y'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{(1 + \sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{s \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{-(2 + \sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + s \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Andererseits ist

$$\frac{y}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{-2(1 + \sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + s \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{-2(1 + \sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + s \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Das ist dasselbe.

Hausaufgabe 86 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 2x \cdot \cos(y)^2$ auf $]-2, 2[$.

(a) Bestätigen Sie: Es ist $\cos(t)^2 = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$ für $t \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf $]-2, 2[$. Probe!

(c) Sei $y = y(x)$ die Lösung zum Anfangswert $y(1) = 0$.
Sei $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ die Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(1) = \frac{\pi}{4}$.
Skizzieren Sie die Graphen von y und $\tilde{y}$ in einer gemeinsamen Skizze. Taschenrechner!

(d) Bestimmen Sie ein $L \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y(1) - \tilde{y}(1)| \cdot \mathrm{e}^{L|\,x-1|}$ für $x \in \,]-2, 2[$.

Lösung.

(a) Für $t \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist

$$\frac{1}{1+\tan(t)^2} = \frac{1}{1+\frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}} = \frac{\cos(t)^2}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} = \frac{\cos(t)^2}{1} = \cos(t)^2.$$

(b) Die Differentialgleichung $y' = 2x \cdot \cos(y)^2$ ist separierbar.

Zunächst liefern die Nullstellen von $\cos(y)$ konstante Lösungen: Für $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir die Lösung $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ auf $]-2, 2[$.

Sodann folgt aus

$$\frac{y'}{\cos(y)^2} = 2x$$

die Gleichung $[\tan(y)] = \int \frac{1}{\cos(y)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y'}{\cos(y)^2}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]$.

Dies ergibt

$$\tan(y) = x^2 + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Es kann y auch Werte außerhalb von $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ annehmen. Also erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \arctan(x^2 + c) + k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{R}$.

Eine Probe bestätigt auch die nichtkonstante Lösung:

Einerseits ist

$$y'(x) = \frac{2x}{1+(x^2+c)^2}\,.$$

Andererseits wird mit Teil (a)

$$\begin{aligned} 2x \cdot \cos(y)^2 &= 2x \cdot \frac{1}{1+\tan(y)^2} = \frac{2x}{1+\tan(\arctan(x^2+c)+k\pi)^2} = \frac{2x}{1+\tan(\arctan(x^2+c))^2} \\ &= \frac{2x}{1+(x^2+c)^2}\,. \end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

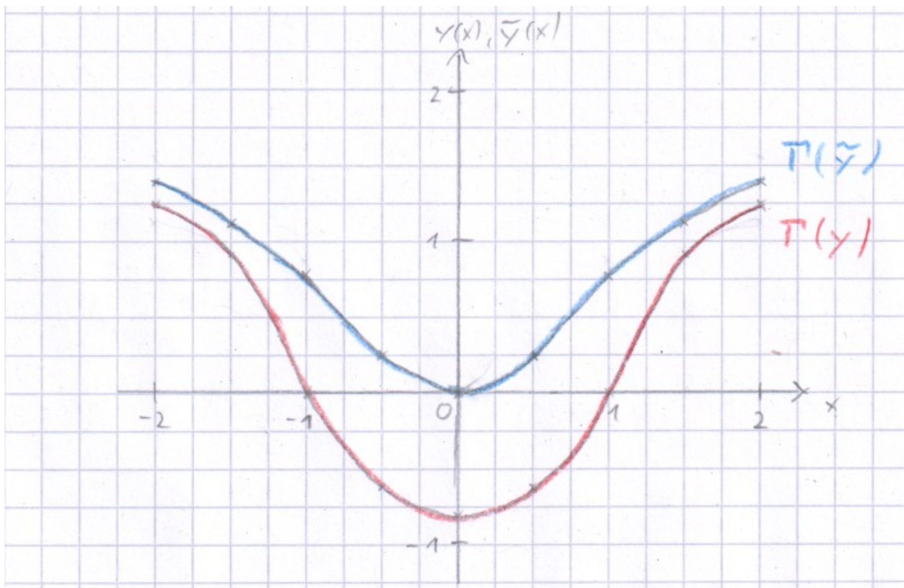
(c) Es ist $y(1) = \arctan(1+c) + k\pi$. Wegen $\tan(0) = 0$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist $\arctan(0) = 0$ und $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und somit

$$y(x) = \arctan(x^2 - 1)$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 0$ und

$$\tilde{y}(x) = \arctan(x^2)$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $\tilde{y}(1) = \frac{\pi}{4}$. Wir erhalten folgende Skizze.



(d) Wir schreiben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x \cdot \cos(y)^2$. Nach dem zweiten Lemma in §6.2.5 reicht es L so zu wählen, dass $|f_y(x, y)| \leq L$ ist für $(x, y) \in \,]-2, 2[\, \times \mathbb{R}$. Es ist

$$|f_y(x, y)| = |2x \cdot 2\cos(y) \cdot (-\sin(y))| \;\leq\; 4|x| \;\leqslant\; 8$$

für alle $y \in \mathbb{R}$, unter Beachtung von $x \in \,]-2, 2[$. Wir können also $L := 8$ wählen. Damit ist

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y(1) - \tilde{y}(1)| \cdot \mathrm{e}^{8|\,x-1|} = \tfrac{\pi}{4} \cdot \mathrm{e}^{8|\,x-1|}$$

für $x \in \,]-2, 2[$.

Hausaufgabe 87 Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} \frac{1+x}{x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x} & -1 & 0 \\ 1+x & 0 & \frac{1}{1+x} \end{pmatrix} y.$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_{>0}$. Probe!

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2\mathrm{e} \\ 2\mathrm{e} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung.

(a) Wir betrachten zunächst die erste Gleichung, welche separierbar ist.

$$y_1' = \frac{1+x}{x} y_1$$

Wir erhalten die Bedingung $[\ln(|y_1|)] = \int \frac{1}{y_1}\,\mathrm{d}y_1 = \int \frac{1+x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + 1\,\mathrm{d}x = [\ln(x) + x]$ unter Beachtung von $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dies ergibt $|y_1| = x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{c_1}$ für ein $c_1 \in \mathbb{R}$.

Also ist $y_1 = x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{c_1}$ oder $y_1 = -x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{c_1}$, wobei e^{c_1} jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann. Da die Differentialgleichung auch durch $y_1(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y_1(x) = d_1\, x\mathrm{e}^x$$

für ein $d_1 \in \mathbb{R}$.

Wir setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$y_2' = \frac{y_1}{x} - y_2 = d_1\,\mathrm{e}^x - y_2.$$

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_2' = -y_2$ erhalten wir die Bedingung $[\ln(|y_2|)] = [-x]$. Dies ergibt analog zu oben $y_2(x) = c_2\,\mathrm{e}^{-x}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_2(x) = c_2(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Aus $c_2'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - c_2(x)\,\mathrm{e}^{-x} = d_1\,\mathrm{e}^x - c_2(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ folgt

$$c_2'(x) = d_1\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Also ist $c_2(x) = \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^{2x} + d_2$ für ein $d_2 \in \mathbb{R}$. Einsetzen ergibt

$$y_2(x) = c_2(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^x + d_2\,\mathrm{e}^{-x}$$

für ein $d_2 \in \mathbb{R}$.

Schließlich setzen wir noch y_1 in die dritte Gleichung ein.

$$y_3' = (1+x)y_1 + \frac{y_3}{1+x} = d_1(1+x)x\mathrm{e}^x + \frac{y_3}{1+x}$$

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_3' = \frac{y_3}{1+x}$ erhalten wir die Bedingung $[\ln(|y_3|)] = [\ln(1+x)]$. Dies ergibt analog zu oben $y_3(x) = c_3\,(1+x)$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_3(x) = c_3(x)\,(1+x)$. Aus $c_3'(x)\,(1+x)+c_3(x) = d_1(1+x)x\mathrm{e}^x+c_3(x)$ erhalten wir

$$c_3'(x) = d_1\, x\mathrm{e}^x.$$

Also ist $[c_3(x)] = \int d_1\, x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [d_1\, x\mathrm{e}^x] - \int d_1\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [d_1\,(x-1)\mathrm{e}^x]$ und damit wird $c_3(x) = d_1(x-1)\mathrm{e}^x + d_3$ für ein $d_3 \in \mathbb{R}$. Dies ergibt

$$y_3(x) = c_3(x)\,(x+1) = (d_1(x-1)\mathrm{e}^x + d_3)(x+1) = d_1(x^2-1)\mathrm{e}^x + d_3(x+1).$$

für ein $d_3 \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir

$$y(x) = \begin{pmatrix} d_1\, x\mathrm{e}^x \\ \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^x + d_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ d_1(x^2-1)\mathrm{e}^x + d_3(x+1) \end{pmatrix}$$

als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

Einerseits ist

$$y'(x) = \begin{pmatrix} d_1\,(1+x)\mathrm{e}^x \\ \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^x - d_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ d_1(x^2+2x-1)\mathrm{e}^x + d_3 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1+x}{x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x} & -1 & 0 \\ 1+x & 0 & \frac{1}{1+x} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \frac{1+x}{x}\cdot d_1\, x\mathrm{e}^x \\ \frac{d_1\, x\mathrm{e}^x}{x} - \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^x - d_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ (1+x)d_1\, x\mathrm{e}^x + \frac{d_1(x^2-1)\mathrm{e}^x + d_3(x+1)}{1+x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)\cdot d_1\,\mathrm{e}^x \\ \frac{d_1}{2}\mathrm{e}^x - d_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ d_1((1+x)x + (x-1))\mathrm{e}^x + d_3 \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe.

(b) Aus der Bedingung

$$y(1) = \begin{pmatrix} d_1\,\mathrm{e} \\ \frac{d_1}{2}\mathrm{e} + d_2\,\mathrm{e}^{-1} \\ 2d_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} \\ 2\mathrm{e} \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt zunächst $d_1 = 2$ und $d_3 = 1$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $d_2 = \mathrm{e}^2$. Also ist

$$y(x) = \begin{pmatrix} 2\, x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2-x} \\ 2(x^2-1)\mathrm{e}^x + (x+1) \end{pmatrix}$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2\mathrm{e} \\ 2\mathrm{e} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Hausaufgabe 88 Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} y.$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}$. Probe!

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung.

(a) Wir betrachten zunächst die letzte Gleichung, welche separierbar ist.

$$y_3' = 2x\, y_3$$

Wir erhalten die Bedingung $[\ln(|y_3|)] = \int \frac{1}{y_3}\,\mathrm{d}y_3 = \int 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]$. Dies ergibt $|y_3| = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{c_3}$ für ein $c_3 \in \mathbb{R}$.

Also ist $y_3 = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{c_3}$ oder $y_3 = -\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{c_3}$, wobei e^{c_3} jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann. Da die Differentialgleichung auch durch $y_3(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen der letzten Differentialgleichung von der Form

$$y_3(x) = d_3\,\mathrm{e}^{x^2}$$

für ein $d_3 \in \mathbb{R}$.

Wir setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$y_2' = y_2 + (2x-1)y_3 = y_2 + d_3(2x-1)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_2' = y_2$ erhalten wir die Bedingung $[\ln(|y_2|)] = [x]$. Dies ergibt analog zu oben $y_2(x) = c_2\,\mathrm{e}^x$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_2(x) = c_2(x)\,\mathrm{e}^x$. Aus $c_2'(x)\,\mathrm{e}^x + c_2(x)\,\mathrm{e}^x = d_3(2x-1)\mathrm{e}^{x^2} + c_2(x)\,\mathrm{e}^x$ folgt

$$c_2'(x) = d_3(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}.$$

Mit $u(x) = x^2 - x$ erhalten wir $[c_2(x)] = \int d_3(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x = \int d_3\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = d_3\mathrm{e}^{x^2-x} + d_2$ mit $d_2 \in \mathbb{R}$. Einsetzen ergibt

$$y_2(x) = c_2(x)\,\mathrm{e}^x = d_3\mathrm{e}^{x^2} + d_2\,\mathrm{e}^x.$$

Schließlich setzen wir y_3 und y_2 in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2x\cdot y_1 + (1-2x)y_2 + y_3 = 2x\cdot y_1 + d_3(1-2x)\mathrm{e}^{x^2} + d_2(1-2x)\mathrm{e}^x + d_3\,\mathrm{e}^{x^2} \\ &= 2x\cdot y_1 + 2d_3(1-x)\mathrm{e}^{x^2} + d_2(1-2x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y_1' = 2x\cdot y_1$ erhalten wir wie oben $y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x^2}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_1(x) = c_1(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$. Aus

$$c_1'(x)\,\mathrm{e}^{x^2} + c_1(x)\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = 2x\cdot c_1(x)\,\mathrm{e}^{x^2} + 2d_3(1-x)\mathrm{e}^{x^2} + d_2(1-2x)\mathrm{e}^x$$

folgt $c_1'(x) = 2d_3(1-x) + d_2(1-2x)\mathrm{e}^{x-x^2}$. Die Substitution $u(x) = x - x^2$ liefert

$$\begin{aligned}[c_1(x)] &= \int 2d_3(1-x)\,\mathrm{d}x + \int d_2(1-2x)\mathrm{e}^{x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2d_3(1-x)\,\mathrm{d}x + \int d_2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u \\ &= \left[d_3(2x-x^2) + d_2\mathrm{e}^{x-x^2}\right],\end{aligned}$$

also

$$c_1(x) \;=\; d_3(2x-x^2) + d_2\mathrm{e}^{x-x^2} + d_1$$

mit $d_1 \in \mathbb{R}$. Einsetzen ergibt

$$y_1(x) = c_1(x)\,\mathrm{e}^{x^2} = d_3(2x-x^2)\mathrm{e}^{x^2} + d_2\mathrm{e}^x + d_1\mathrm{e}^{x^2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$y(x) = \begin{pmatrix} d_1\mathrm{e}^{x^2} + d_2\mathrm{e}^x + d_3(2x-x^2)\mathrm{e}^{x^2} \\ d_2\,\mathrm{e}^x + d_3\mathrm{e}^{x^2} \\ d_3\,\mathrm{e}^{x^2} \end{pmatrix}$$

als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

Einerseits ist

$$y'(x) = \begin{pmatrix} d_1\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} + d_2\mathrm{e}^x + d_3(2-2x+4x^2-2x^3)\mathrm{e}^{x^2} \\ d_2\,\mathrm{e}^x + d_3\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \\ d_3\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x\cdot(d_1\mathrm{e}^{x^2} + d_2\mathrm{e}^x + d_3(2x-x^2)\mathrm{e}^{x^2}) + (1-2x)(d_2\,\mathrm{e}^x + d_3\mathrm{e}^{x^2}) + d_3\,\mathrm{e}^{x^2} \\ d_2\,\mathrm{e}^x + d_3\mathrm{e}^{x^2} + (2x-1)d_3\,\mathrm{e}^{x^2} \\ 2x\cdot d_3\,\mathrm{e}^{x^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x\cdot d_1\mathrm{e}^{x^2} + d_2\,\mathrm{e}^x + d_3(4x^2-2x^3+2-2x)\mathrm{e}^{x^2} \\ d_2\,\mathrm{e}^x + d_3\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \\ d_3\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

(b) Aus der Bedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ d_2 + d_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt zunächst $d_3 = 1$ und dann schrittweise $d_2 = 4$ und $d_1 = -1$. Also ist

$$y(x) = \begin{pmatrix} -e^{x^2} + 4e^x + (2x - x^2)e^{x^2} \\ 4e^x + e^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^x - (x-1)^2\, e^{x^2} \\ 4e^x + e^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.