Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 23

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 89 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix} y$.

(a) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem auf $\mathbb{R}$?

$$(y_{[1]}(x), y_{[2]}(x), y_{[3]}(x), y_{[4]}(x)) \;=\; (\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Damit das gegebene Tupel aus von x abhängigen Vektoren ein Fundamentalsystem ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein.

(1) Jeder Vektor des Tupels ist eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(2) Für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass die Wronski-Determinante des Tupels ungleich Null ist.

$$\mathrm{w}(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} & 0 & -\mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^{2x} & -2\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \\ a\mathrm{e}^{2x} & 2\mathrm{e}^{-x} & b\mathrm{e}^{-x} & -4\mathrm{e}^{-x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir stellen also zuerst sicher, dass alle Vektoren Lösungen der Differentialgleichung sind.

Für $y_{[1]}$ ergibt sich damit die Bedingung

$$\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2a \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3-a \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es muss also $2a = -3 - a$, d.h. $a = -1$ sein, damit $y_{[1]}$ eine Lösung ist.

Eine direkte Rechnung ergibt, dass $y_{[2]}$, $y_{[3]}$ und $y_{[4]}$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nun untersuchen wir, für welche $b \in \mathbb{R}$ die Wronski-Determinante für ein $x \in \mathbb{R}$ ungleich Null ist. Wir untersuchen w(0), da an dieser Stelle die Rechnung am kürzesten wird.

$$\mathrm{w}(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & b & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & b & -4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & b \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & b+2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (b+2) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -(b+2) \cdot (-1) = b + 2 \overset{!}{\neq} 0$$

Das gegebene Tupel ist also ein Fundamentalsystem für $a = -1$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(b) Wir wollen eines der Fundamentalsysteme aus Teil (a) benutzen.

Es ist $a = -1$. Wir können beliebig $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ wählen, und wir wählen $b = 0$.

Wir erhalten so folgendes Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

$$\left(\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Gesucht sind damit Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_4 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist also

$$y(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 90 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) := \left(\begin{smallmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right)$ und $g(x) := \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie ein Tupel $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$ von Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ mit Wronski-Determinante $\mathrm{w}(0) \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$. Probe!

Lösung.

(a) Wir betrachten zunächst die erste Gleichung $y_1' = xy_1$, welche separierbar ist.

Wir haben die konstante Lösung $y_1(x) = 0$.

Ist $y_1 \neq 0$ als Funktion, so ist die erste Gleichung äquivalent zu

$$\int \frac{1}{y_1}\,\mathrm{d}y_1 \overset{!}{=} \int x\,\mathrm{d}x\,.$$

Also ist $\ln(|y_1|) = \frac{1}{2}x^2 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Somit wird $y_1 = c_1 \exp(\frac{1}{2}x^2)$ für ein $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $c_1 = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $y_1(x) = 0$.

Also ist

$$y_1(x) = c_1 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Aus der dritten Gleichung $y_3' = xy_3$ ergibt sich analog

$$y_3(x) = c_3 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \quad \text{mit } c_3 \in \mathbb{R}.$$

Nun betrachten wir die zweite Gleichung $y_2' = xy_2 + y_3 = xy_2 + c_3 \exp(\frac{1}{2}x^2)$.

Wir machen den Ansatz $y_2(x) = c_2(x) \exp(\frac{1}{2}x^2)$ und haben folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{array}{rrcl} & y_2'(x) & = & xy_2(x) + c_3 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \\ \Longleftrightarrow & c_2'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) + c_2(x)\cdot x \cdot \exp(\tfrac{1}{2}x^2) & = & xy_2(x) + c_3 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \\ \Longleftrightarrow & c_2'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) & = & c_3 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \\ \Longleftrightarrow & c_2'(x) & = & c_3 \\ \Longleftrightarrow & c_2(x) & = & [c_3 x] \end{array}$$

Also ist $c_2(x) = c_3 x + c_2$ für ein $c_2 \in \mathbb{R}$. Damit wird

$$y_2(x) = c_2 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) + c_3 x \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \quad \text{mit } c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt ist also

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = c_1 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \exp(\tfrac{1}{2}x^2) \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}$.

Für $c_1 = 1, c_2 = 0$ und $c_3 = 0$ erhalten wir die Lösung $y_{[1]}(x) = \exp(\frac{1}{2}x^2) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Für $c_1 = 0, c_2 = 1$ und $c_3 = 0$ erhalten wir die Lösung $y_{[2]}(x) = \exp(\frac{1}{2}x^2) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Für $c_1 = 0, c_2 = 0$ und $c_3 = 1$ erhalten wir die Lösung $y_{[3]}(x) = \exp(\frac{1}{2}x^2) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir berechnen die Wronski-Determinante $\mathrm{w}(0)$ des Tupels $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$.

$$\mathrm{w}(0) \;=\; \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 1$$

Also ist $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$ ein Tupel von Lösungen mit Wronski-Determinante $\mathrm{w}(0) \neq 0$.

(b) Wir verwenden das Fundamentalsystem $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$ aus (a) und machen den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y(x) \;=\; \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}(x) \;=\; c_1(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_3(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Damit haben wir folgendes Differentialgleichungssystem zu lösen.

$$\begin{array}{rrcl} & y'(x) & = & A(x)y(x) + g(x) \\ \iff & \sum_{k=1}^{3} c_k'(x) y_{[k]}(x) + \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}'(x) & = & \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}'(x) + g(x) \\ \iff & c_1'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_3'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & = & \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $c_1'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) = x$, also $c_1'(x) = x\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)$. Damit wird

$$c_1(x) = \int x\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x = \int \exp(-u)\,\mathrm{d}u = [-\exp(-u)] = [-\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)]\,.$$

Wir wählen $c_1(x) = -\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)$.

Aus der dritten Gleichung $c_3'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) = x$ erhalten wir analog

$$c_3(x) = [-\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)]\,.$$

Wir wählen $c_3(x) = -\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)$.

Wir lösen die zweite Gleichung.

$$\begin{array}{rrcl} & c_2'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) + c_3'(x)\cdot x\exp(\tfrac{1}{2}x^2) & = & x^2 \\ \iff & c_2'(x)\exp(\tfrac{1}{2}x^2) + x^2 & = & x^2 \\ \iff & c_2'(x) & = & 0 \\ \iff & c_2(x) & = & [0] \end{array}$$

Wir wählen $c_2(x) = 0$.

Insgesamt erhalten wir

$$y(x) \;=\; (-1)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + (-1)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -x \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Wir machen eine Probe. Es ist

$$A(x)y(x) + g(x) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -x \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} -x \\ -x^2-1 \\ -x \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; y'(x).$$

Also ist $y(x) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -x \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ eine partikuläre Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$.

Hausaufgabe 91 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) := \left(\begin{smallmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{smallmatrix}\right)$ und $g(x) := \left(\begin{smallmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Verwenden Sie Hausaufgabe 88, um ein Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$. Probe!

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 88.(a) wissen wir: Jede Lösung von $y' = A(x)y$ ist von der Form

$$y(x) \;=\; c_1 \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_3 \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 2x-x^2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Für $c_1 = 1, c_2 = 0$ und $c_3 = 0$ erhalten wir die Lösung $y_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Für $c_1 = 0, c_2 = 1$ und $c_3 = 0$ erhalten wir die Lösung $y_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Für $c_1 = 0, c_2 = 0$ und $c_3 = 1$ erhalten wir die Lösung $y_{[3]}(x) = \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 2x-x^2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir zeigen, dass $(y_{[1]}\,, y_{[2]}\,, y_{[3]})$ ein Fundamentalsystem ist.

Es genügt zu zeigen, dass für die Wronski-Determinante $\mathrm{w}(0) \neq 0$ gilt.

In der Tat ist $\mathrm{w}(0) = \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \neq 0$.

Alternativ können wir auch wie folgt argumentieren:
Das Tupel $(y_{[1]}\,, y_{[2]}\,, y_{[3]})$ erzeugt nach Hausaufgabe 88.(a) den Lösungsraum $\mathrm{L}_{A,0}$. Wegen $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{L}_{A,0}) = 3$ ist also $(y_{[1]}\,, y_{[2]}\,, y_{[3]})$ eine Basis von $\mathrm{L}_{A,0}$, d.h. ein Fundamentalsystem.

(b) Wir bestimmen zunächst eine partikuläre Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$.

Dazu verwenden wir das Fundamentalsystem aus (a) und machen den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y(x) \;=\; \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}(x) \;=\; c_1(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2(x) \cdot \mathrm{e}^{x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_3(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 2x-x^2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{array}{rrcl} & y'(x) & = & A(x)y(x) + g(x) \\ \iff & \sum_{k=1}^{3} c_k'(x) y_{[k]}(x) + \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}'(x) & = & \sum_{k=1}^{3} c_k(x) y_{[k]}'(x) + g(x) \\ \iff & c_1'(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2'(x) \cdot \mathrm{e}^{x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_3'(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} 2x-x^2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & = & \left(\begin{smallmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung erhalten wir $c_3'(x)\mathrm{e}^{x^2} = x$, also $c_3'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. Damit wird

$$c_3(x) = \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}\exp(-u)\,\mathrm{d}u = [-\tfrac{1}{2}\exp(-u)] = [-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}].$$

Wir wählen $c_3(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

Wir lösen die zweite Gleichung.

$$\begin{array}{rrcl} & c_2'(x)\mathrm{e}^x + c_3'(x)\mathrm{e}^{x^2} & = & x+1 \\ \Longleftrightarrow & c_2'(x)\mathrm{e}^x + x & = & x+1 \\ \Longleftrightarrow & c_2'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \\ \Longleftrightarrow & c_2(x) & = & [-\mathrm{e}^{-x}] \end{array}$$

Wir wählen $c_2(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Wir lösen die erste Gleichung.

$$\begin{array}{rrcl} & c_1'(x)\mathrm{e}^{x^2} + c_2'(x)\mathrm{e}^x + c_3'(x)\mathrm{e}^{x^2}(2x - x^2) & = & 1 + 2x^2 \\ \Longleftrightarrow & c_1'(x)\mathrm{e}^{x^2} + 1 + x(2x - x^2) & = & 1 + 2x^2 \\ \Longleftrightarrow & c_1'(x) & = & x^3\mathrm{e}^{-x^2} \end{array}$$

Es wird

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-\tfrac{1}{2}u\mathrm{e}^{-u}] + \int \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-\tfrac{1}{2}u\mathrm{e}^{-u}] + [-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}] \\ &= [-\tfrac{1}{2}(u+1)\mathrm{e}^{-u}] = \left[-\tfrac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}\right] \end{aligned}$$

Wir wählen $c_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_{[0]}(x) &= c_1(x)y_{[1]}(x) + c_2(x)y_{[2]}(x) + c_3(x)y_{[3]}(x) \\ &= -\tfrac{1}{2}(x^2+1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2x-x^2\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2x+3\\3\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jede Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$ ist also von der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{[0]}(x) + c_1y_{[1]}(x) + c_2y_{[2]}(x) + c_3y_{[3]}(x) \\ &= -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2x+3\\3\\1\end{pmatrix} + c_1\cdot\mathrm{e}^{x^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\cdot\mathrm{e}^x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\cdot\mathrm{e}^{x^2}\begin{pmatrix}2x-x^2\\1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aus der Anfangsbedingung

$$y(0) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

folgt zunächst $c_3 = 0$ und dann schrittweise $c_2 = \frac{3}{2}$ und $c_1 = 0$.

Also ist

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2x+3\\3\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\mathrm{e}^{x^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\mathrm{e}^{x^2}\begin{pmatrix}2x-x^2\\1\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^x-(2x+3)\\3\mathrm{e}^x-3\\-1\end{pmatrix}$$

eine Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Wir machen eine Probe.

Es ist

$$\begin{aligned}
A(x)y+g(x) &= \begin{pmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^x-(2x+3) \\ 3e^x-3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6xe^x-(4x+6)x+(1-2x)(3e^x-3)-1 \\ 3e^x-3-2x+1 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^x-4x^2-4 \\ 3e^x-2x-2 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^x-2 \\ 3e^x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= y'(x)\,.
\end{aligned}$$

Also ist das Differentialgleichungssystem erfüllt.

Außerdem ist $y(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\cdot 1-(2\cdot 0+3) \\ 3\cdot 1-3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.

Hausaufgabe 92 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Berechnen Sie $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Zunächst bringen wir A in Jordansche Normalform.
Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X\mathrm{E}_4) = \det\begin{pmatrix} 1-X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5-X & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 7-X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -5-X & 4 \\ -9 & 7-X \end{pmatrix} \\
&= ((X-1)^2+1)((X+5)(X-7)+36) = ((X-1)^2+1)(X^2-2X+1) \\
&= (X-(1+\mathrm{i}))(X-(1-\mathrm{i}))(X-1)^2.
\end{aligned}$$

Demnach hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1+\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\mathrm{aV}_A(1+\mathrm{i}) = \mathrm{aV}_A(1-\mathrm{i}) = 1$ und $\mathrm{aV}_A(1) = 2$.

Zu $\lambda_1 = 1+\mathrm{i}$. Wir formen um:

$$A-(1+\mathrm{i})\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6-\mathrm{i} & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 6-\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -6+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also hat $\mathrm{E}_A(1+\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A-(1+\mathrm{i})\mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$. Wir formen um:

$$A-(1-\mathrm{i})\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6+\mathrm{i} & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 6+\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -6-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also hat $\mathrm{E}_A(1-\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A-(1-\mathrm{i})\mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_3 = 1$. Es wird

$$A_{(1)} = A - \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right)$, und damit auch $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$, eine Basis von $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit $\mathrm{gV}_A(1) = 1$ und A ist nicht diagonalisierbar.
Es wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-6&4\\0&0&-9&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Durch Ergänzung erhalten wir die Basis $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{H}_A(1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir setzen $y_{2,1} := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und erhalten die Hauptvektorkette $(A_{(1)}y_{2,1}\,, y_{2,1}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-6\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Insgesamt ist also $\left(\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-6\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ eine Jordanbasis von A.

Also ist $S := \begin{pmatrix}\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0&0\\1&1&0&0\\0&0&-6&1\\0&0&-9&0\end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1+\mathrm{i}&0&0&0\\0&1-\mathrm{i}&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

in Jordanscher Normalform.

Ist $\begin{pmatrix}C&0\\0&D\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ eine Blockdiagonalmatrix mit invertierbaren Blöcken C, $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, dann ist $\begin{pmatrix}C&0\\0&D\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}C^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}CC^{-1}&0\\0&DD^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{E}_2&0\\0&\mathrm{E}_2\end{pmatrix} = \mathrm{E}_4$, und also $\begin{pmatrix}C&0\\0&D\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}C^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}$.

Damit wird $S^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&0&0\\-1&\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&9&-6\end{pmatrix}$.

Es ist $\exp(Jx) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^x&x\mathrm{e}^x\\0&0&0&\mathrm{e}^x\end{pmatrix} = \mathrm{e}^x\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&0&0\\0&0&1&x\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{e}^x\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \mathrm{e}^x\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&x\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\exp(Ax) &= S\exp(Jx)S^{-1}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0&0\\1&1&0&0\\0&0&-6&1\\0&0&-9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&0&0\\-1&\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^x}{9}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0&0\\1&1&0&0\\0&0&-6&1\\0&0&-9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&x\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&9&-6\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&0&0\\\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&0&0\\-1&\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^x}{9}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-6&1-6x\\0&0&-9&-9x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&9&-6\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})&-(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})&0&0\\\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}&\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^x}{9}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&9(1-6x)&36x\\0&0&-81x&9(1+6x)\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^x\begin{pmatrix}\cos(x)&-\sin(x)&0&0\\\sin(x)&\cos(x)&0&0\\0&0&1-6x&4x\\0&0&-9x&1+6x\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$