Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 24

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 93 Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar mit $S^{-1}AS =: D$ diagonal.
Bestimmen Sie $S \cdot \exp(Dx)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$, ohne dafür S^{-1} zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^6 \\ \mathrm{e}^6 \\ 0 \\ \mathrm{e}^6 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir das charakteristische Polynom von A als $\chi_A(X) = (-2-X)(-1-X)(1-X)(5-X) = (X+2)(X+1)(X-1)(X-5)$ ablesen. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_4 = 5$ jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

Zu $\lambda_1 = -2$. Wir formen um: $A + 2\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-2) = \mathrm{Kern}(A + 2\mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_2 = -1$. Wir formen um: $A + \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_3 = 1$. Wir formen um: $A - \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - \mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_4 = 5$. Wir formen um: $A - 5\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -7 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(5) = \mathrm{Kern}(A - 5\mathrm{E}_4)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Zusammen erhalten wir die folgende invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $S^{-1}AS =: D$.

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Eine direkte Rechnung ergibt

$$S \cdot \exp(Dx) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} & -2\mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{5x} \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & 0 & \mathrm{e}^{5x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$$

(b) Da S eine reelle Matrix ist, enthält auch $S \cdot \exp(Dx)$ in den Spalten ein Fundamentalsystem. Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \\ \mathrm{e}^{5x} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} \right)$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

(c) Wir machen den Ansatz

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \\ \mathrm{e}^{5x} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$$

mit c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung führt auf folgendes Gleichungssystem.

$$y(1) = \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2\mathrm{e}^{-1} \\ c_2\mathrm{e}^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_3\mathrm{e} \\ 0 \\ c_3\mathrm{e} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4\mathrm{e}^{5} \\ c_4\mathrm{e}^{5} \\ 0 \\ c_4\mathrm{e}^{5} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{6} \\ \mathrm{e}^{6} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{6} \end{pmatrix}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen wird sofort $c_3 = 0$ und $c_4 = \mathrm{e}$. Zusammen mit der zweiten Gleichung erhalten wir $c_2 = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$c_1\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{6} \overset{!}{=} \mathrm{e}^{6}$$

und also auch $c_1 = 0$. Insgesamt ist damit

$$y(x) = \mathrm{e} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \\ \mathrm{e}^{5x} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5x+1} \\ \mathrm{e}^{5x+1} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{5x+1} \end{pmatrix}$$

die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{6} \\ \mathrm{e}^{6} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{6} \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 94 Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Sei $\chi_A(X) = -(X-6)^3$ bereits bekannt.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung. Zur Vorbereitung bestimmen wir zunächst eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS =: J$ in Jordanform. Aus dem charakteristischen Polynom lesen wir den einzigen Eigenwert $\lambda_1 = 6$ mit algebraischer Vielfachheit 6 ab. Da alle Eigenwerte von A reell sind, wird auch S als reelle Matrix gewählt werden können.

Wir formen um: $A_{(1)} = A - 6\mathrm{E}_3 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat $\mathrm{E}_A(6) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$ die Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Insbesondere hat $\lambda_1 = 6$ die geometrische Vielfachheit 1. Folglich ist A nicht diagonalisierbar.

Wir formen um: $A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Damit können wir die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ zu der Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ ergänzen.

Wir formen um: $A_{(1)}^3 \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Damit können wir die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ zu der Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ des Hauptraums $\mathrm{H}_A(6) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) = \mathbb{R}^{3\times 1}$ ergänzen.

Sei $y_{3,1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aus Dimensionsgründen bekommen wir nur die Hauptvektorkette $(A_{(1)}^2 y_{3,1},\ A_{(1)} y_{3,1},\ y_{3,1})$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 6$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} A_{(1)} y_{3,1} &= \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ A_{(1)}^2 y_{3,1} &= \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir die folgende invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS =: J$ in Jordanform.

$$S := \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad J = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$$

Als weitere Vorbereitung bestimmen wir $\exp(Jx)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach dem Beispiel in §6.3.2.1 im Skript.

$$\exp(Jx) = \mathrm{e}^{6x} \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Ab hier gibt es nun zwei gleichwertige, alternative Wege, um die beiden Teilaufgaben zu lösen.

Als ersten Lösungsweg bestimmen wir $\exp(Ax) = S\exp(Jx)S^{-1}$. Das hilft beim Lösen des Gleichungssystems in (b), aber es muss S invertiert werden.

Als zweiten Lösungsweg bestimmen wir nur $S\exp(Jx)$ und invertieren S nicht. Dies ist möglich, da S eine reelle Matrix ist.

Lösungsweg 1.

(a) Wir berechnen zunächst S^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Damit können wir $\exp(Ax)$ bestimmen.

$$\begin{aligned} \exp(Ax) = S\exp(Jx)S^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{6x}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2x-2 & x^2-2x+1 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{6x} \begin{pmatrix} (x-1)^2 & 2x(x-1) & x(2-x) \\ x & 1+2x & -x \\ x^2 & 2x(1+x) & 1-x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In den Spalten von $\exp(Ax)$ stetht nun ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

$$\left(\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2x(x-1) \\ 1+2x \\ 2x(1+x) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} x(2-x) \\ -x \\ 1-x^2 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Jede Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ ist von der Form $y(x) = \exp(Ax)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ mit c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung $y(1) = \exp(A)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \exp(A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(-A)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-6}\begin{pmatrix} (-1-1)^2 & -2(-1-1) & -(2-(-1)) \\ -1 & 1-2 & 1 \\ (-1)^2 & -2(1-1) & 1-(-1)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-6}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch Einsetzen von $x = -1$ in $\exp(Ax)$. Damit ist die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$y(x) = \exp(Ax)\begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-6} \\ -\mathrm{e}^{-6} \\ \mathrm{e}^{-6} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{6x-6}\begin{pmatrix} 4(x-1)^2-2x(x-1)+x(2-x) \\ 4x-1-2x-x \\ 4x^2-2x(1+x)+1-x^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{6x-6}\begin{pmatrix} (x-2)^2 \\ x-1 \\ (x-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsweg 2.

(a) Wir bestimmen $S \cdot \exp(Jx)$.

$$S\exp(Jx) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2 & 2x-2 & (x-1)^2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \end{pmatrix}$$

Da S reell ist, steht nun in den Spalten von $S \cdot \exp(Jx)$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

$$\left(\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2x-2 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Jede Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ ist von der Form

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} 2x-2 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

mit c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^6\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 0 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^6\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^6\begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten direkt $c_1 = \frac{\mathrm{e}^{-6}}{2}$ und $c_2 = -c_3$. Einsetzen in die letzte Gleichung ergibt $0 = 1 + c_2\mathrm{e}^6$. Damit ist $c_2 = -\mathrm{e}^{-6}$ und $c_3 = \mathrm{e}^{-6}$. Also ist die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ gegeben durch

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-6}}{2}\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}2x-2\\1\\2x\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}(x-1)^2\\x\\x^2\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{6x-6}\begin{pmatrix}(x-2)^2\\x-1\\(x-1)^2\end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 95 Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}$.

Lösung. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Als ersten Schritt bestimmen wir eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS =: D$ in Jordanform. Dazu benötigen wir zunächst das charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_3) = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & -3 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 3 & 0 & -X \end{pmatrix} = (3-X) \det \begin{pmatrix} -X & -3 \\ 3 & -X \end{pmatrix} \\ &= (3-X)(X^2+9) = -(X-3)(X-3\mathrm{i})(3+3\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Also besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = -3\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 3\mathrm{i}$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Zu $\lambda_1 = -3\mathrm{i}$. Wir formen um: $A + 3\mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & -3 \\ 0 & 3+3\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-3\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A + 3\mathrm{i}\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Zu $\lambda_2 = 3$. Wir formen um: $A - 3\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Zu $\lambda_3 = 3\mathrm{i}$. Wir formen um: $A - 3\mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & -3 \\ 0 & 3-3\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 0 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(3\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A - 3\mathrm{i}\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Zusammen erhalten wir die folgende invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS =: D$.

$$S := \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Da S keine reelle Matrix ist, berechnen wir $\exp(Ax) = S \cdot \exp(Dx) \cdot S^{-1}$. Dazu bestimmen wir zunächst S^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= S \cdot \exp(Dx) \cdot S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} & 0 & \mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & 0 \\ \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} & 0 & \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) & 0 & -(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \\ 0 & 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{3x} & 0 \\ \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} & 0 & \mathrm{i}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3x) & 0 & -\sin(3x) \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & 0 \\ \sin(3x) & 0 & \cos(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In den Spalten von $\exp(Ax)$ steht nun ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

$$(\begin{pmatrix} \cos(3x) \\ 0 \\ \sin(3x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(3x) \\ 0 \\ \cos(3x) \end{pmatrix})$$

Für das inhomogene Differentialgleichungssystem machen wir den Ansatz $y(x) = \exp(Ax)c(x)$ der Variation der Konstanten mit einem zu bestimmenden $c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix}$. Wir erhalten folgende Bedingung.

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ay(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \exp(Ax)c(x)' + A\exp(Ax)c(x) &= A\exp(Ax)c(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \exp(Ax)c(x)' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad c(x)' &= \exp(-Ax)\begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\exp(-Ax) = \exp(A(-x)) = \begin{pmatrix} \cos(-3x) & 0 & -\sin(-3x) \\ 0 & \mathrm{e}^{-3x} & 0 \\ \sin(-3x) & 0 & \cos(-3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3x) & 0 & \sin(3x) \\ 0 & \mathrm{e}^{-3x} & 0 \\ -\sin(3x) & 0 & \cos(3x) \end{pmatrix}$ erhalten wir $c'(x) = \begin{pmatrix} 3\sin(3x) \\ 9x\mathrm{e}^{-3x} \\ 3\cos(3x) \end{pmatrix}$. Also können wir $c(x) = \begin{pmatrix} -\cos(3x) \\ -(3x+1)\mathrm{e}^{-3x} \\ \sin(3x) \end{pmatrix}$ wählen, wobei der mittlere Eintrag sich aus

$$\int 9x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = [-3x\mathrm{e}^{-3x}] - \int -3\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = [-(3x+1)\mathrm{e}^{-3x}]$$

ergibt. Damit ist

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax)c(x) = \begin{pmatrix} \cos(3x) & 0 & -\sin(3x) \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & 0 \\ \sin(3x) & 0 & \cos(3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(3x) \\ -(3x+1)\mathrm{e}^{-3x} \\ \sin(3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(3x)^2 - \sin(3x)^2 \\ -(3x+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -(3x+1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems. Zusammensetzen ergibt alle Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = y_{[0]}(x) + \mathrm{e}^{Ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -(3x+1) \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} \cos(3x) \\ 0 \\ \sin(3x) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -\sin(3x) \\ 0 \\ \cos(3x) \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 96 Wir betrachten die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Aus Hausaufgabe 92 kennen wir bereits $\mathrm{e}^{Ax} = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-6x & 4x \\ 0 & 0 & -9x & 1+6x \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Aus e^{Ax} können wir direkt ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ ablesen.

$$\left(\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-6x \\ -9x \end{pmatrix}, \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4x \\ 1+6x \end{pmatrix}\right)$$

Für das inhomogene Differentialgleichungssystem machen wir den Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{Ax}c(x)$ der Variation der Konstanten mit einem zu bestimmenden $c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \\ c_4(x) \end{pmatrix}$. Wir erhalten folgende Bedingungen.

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ay(x) + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \exp(Ax)c(x)' + A\exp(Ax)c(x) &= A\exp(Ax)c(x) + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \exp(Ax)c(x)' &= \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad c(x)' &= \exp(-Ax) \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\exp(-Ax) = \exp(A(-x)) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) & 0 & 0 \\ \sin(-x) & \cos(-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+6x & -4x \\ 0 & 0 & 9x & 1-6x \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+6x & -4x \\ 0 & 0 & 9x & 1-6x \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$c'(x) = \exp(-Ax) \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x)^2+\sin(x)^2 \\ -\sin(x)\cos(x)+\sin(x)\cos(x) \\ \mathrm{e}^x(1-2x) \\ \mathrm{e}^x(2-3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \\ 1-2x \\ 2-3x \end{pmatrix}$$

und können daher

$$c(x) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x} \\ 0 \\ x-x^2 \\ 2x-\frac{3x^2}{2} \end{pmatrix}$$

wählen. Also ist

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax)c(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-6x & 4x \\ 0 & 0 & -9x & 1+6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x} \\ 0 \\ x-x^2 \\ 2x-\frac{3x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) \\ x-x^2-6x^2+6x^3+8x^2-6x^3 \\ -9x^2+9x^3+2x-\frac{3x^2}{2}+12x^2-9x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \\ (x^2+x)\mathrm{e}^x \\ (\frac{3x^2}{2}+2x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems. Zusammensetzen ergibt alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}$ mit $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = y_{[0]}(x) + \mathrm{e}^{Ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \\ (x^2+x)\mathrm{e}^x \\ (\frac{3x^2}{2}+2x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix} + c_1\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-6x \\ -9x \end{pmatrix} + c_4\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4x \\ 1+6x \end{pmatrix}$$

(b) Aus der Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} y(0) = y_{[0]}(0) + \mathrm{e}^{A\cdot 0}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$y(x) = y_{[0]}(0) + \mathrm{e}^{Ax}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \\ (x^2+x)\mathrm{e}^x \\ (\frac{3x^2}{2}+2x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix} + \mathrm{e}^x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \\ (x^2+x+1)\mathrm{e}^x \\ (\frac{3x^2}{2}+2x+\frac{3}{2})\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$