Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 25

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 97 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 3y' + 2y$$

auf $\mathbb{R}$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -9$, $y''(0) = 0$. Probe!

Lösung. Wir setzen $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$, um die Differentialgleichung in ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu übersetzen.
Dabei erhalten wir $z' = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 2&3&0 \end{pmatrix} z$ mit Anfangsbedingung $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zunächst bringen wir $A := \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 2&3&0 \end{pmatrix}$ in Jordansche Normalform.
Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{E}_3) &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 2 & 3 & -X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -X-1 & 1 & 0 \\ X+1 & -X & 1 \\ -X-1 & 3 & -X \end{pmatrix} = (X+1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 3 & -X \end{pmatrix} \\ &= (X+1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-X & -X & 1 \\ 2 & 3 & -X \end{pmatrix} = -(X+1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & -X \end{pmatrix} = -(X+1)(X(X-1)-2) \\ &= -(X+1)(X^2 - X - 2) = -(X+1)^2(X-2). \end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\mathrm{aV}_A(2) = 1$ und $\mathrm{aV}_A(-1) = 2$.

Zu $\lambda_1 = 2$. Wir formen um:

$$A - 2\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, und damit auch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, eine Basis von $\mathrm{E}_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2\mathrm{E}_4)$.
Zu $\lambda_2 = -1$. Es wird

$$A_{(1)} \;=\; A + \mathrm{E}_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_3)$.
Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit $\mathrm{gV}_A(-1) = 1$, und folglich ist A nicht diagonalisierbar.
Es wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Ergänzung erhalten wir die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{H}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir setzen $y_{2,1} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhalten die Hauptvektorkette $(A_{(1)}y_{2,1}\,, y_{2,1}) \;=\; \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Aus Dimensionsgründen gibt es nur diese Hauptvektorkette.

Insgesamt ist also $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Jordanbasis von A.

Also ist $S := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in Jordanscher Normalform.

Da S eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist, enthält auch

$$\exp(Ax)S = S\exp(Jx) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} & -x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x} \\ 4\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} & -x\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

in den Spalten ein Fundamentalsystem.
Also sind alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $z' = Az$ von der Form

$$z(x) \;=\; c_1\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -x-2 \\ x+1 \\ -x \end{pmatrix}.$$

mit $c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}$.
Die Anfangsbedingung $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt auf das lineare Gleichungssystem

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\stackrel{!}{=}\; \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Es ist also $c_1 = -2$, $c_2 = -8$, $c_3 = 3$. Mithin ist

$$z(x) = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -3x-6 \\ 3x+3 \\ -3x \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -3x+2 \\ 3x-5 \\ -3x+8 \end{pmatrix}$$

die Lösung von $z' = Az$ zur Anfangsbedingung $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Wegen $z_1 = y$ ist also

$$y(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^{-x}$$

die Lösung von $y''' = 3y' + 2y$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -9$, $y''(0) = 0$.
Probe. Zunächst erhalten wir die folgenden Ableitungen.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -4\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 3(1-x)\mathrm{e}^{-x} \\ y''(x) &= -8\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-x} - 3(x-2)\mathrm{e}^{-x} \\ y'''(x) &= -16\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 3(3-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Damit wird in der Tat

$$\begin{aligned}
3y'(x) + 2y(x) &= 3(-4\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 3(1-x)\mathrm{e}^{-x}) + 2(-2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^{-x}) \\
&= -16\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 3(3-x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= y'''(x).
\end{aligned}$$

Weiterhin wird

$$\begin{array}{rcccr}
y(0) &=& -2+2-3\cdot 0 &=& 0 \\
y'(0) &=& -4-2-3\cdot 1 &=& -9 \\
y''(0) &=& -8+2-3\cdot(-2) &=& 0.
\end{array}$$

Hausaufgabe 98 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2-1} + \frac{x-1}{y^3}$$

auf $]-1,1[$ zur Anfangsbedingung $y(0) = -1$. Probe!

Lösung. Die gegebene Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit

$$t = -3\,, \qquad a(x) = \frac{1}{x^2-1} \qquad \text{und} \qquad b(x) = x-1\,.$$

Wir haben also folgende lineare Differentialgleichung zu lösen, die wir durch die Substitution $u = y^4$ erhalten.

$$u' = \frac{4u}{x^2-1} + 4(x-1)$$

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $u' = \frac{4u}{x^2-1}$.

Wir erhalten die konstante Lösung $u(x) = 0$. Ist $u \neq 0$ als Funktion, so ergibt sich $\frac{u'}{u} = \frac{4}{x^2-1}$. Wir haben also die Gleichung

$$[\ln(|u|)] = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \overset{!}{=} \int \frac{4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

zu lösen. Es wird

$$\int \frac{4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; [2(\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|))] = \left[\ln\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)\right].$$

Also wird $u = d\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ mit $d \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Für $d = 0$ ergibt sich die konstante Lösung $u(x) = 0$. Damit ist also $u = d\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ mit $d \in \mathbb{R}$.
Für die inhomogene lineare Differentialgleichung $u' = \frac{4u}{x^2-1} + 4(x-1)$ machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$u(x) = d(x)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

Dies führt auf $d'(x)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \overset{!}{=} 4(x-1)$ und damit auf

$$d'(x) \;\overset{!}{=}\; 4\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-1)} \;=\; 4\cdot\frac{x^2+2x+1}{x-1} \;=\; 4(x+3+\tfrac{4}{x-1})\,.$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt eine Polynomdivision durchgeführt.
Es wird also unter Verwendung von $x \in\,]-1,1[$

$$[d(x)] \;=\; \int 4x + 12 + \tfrac{16}{x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; [2x^2 + 12x + 16\ln(1-x)]\,,$$

mithin

$$d(x) \;=\; 2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + s$$

mit $s \in \mathbb{R}$.

Zusammen erhalten wir also für die lineare Differentialgleichung

$$u(x) = (2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + s)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

mit $s \in \mathbb{R}$.
Wegen $u = y^4$ erhalten wir für die ursprüngliche Differentialgleichung

$$y(x) \;=\; (2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + s)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$y(x) \;=\; -(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + s)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $s \in \mathbb{R}$. Hierbei haben wir wieder $x \in \left]-1, 1\right[$ verwendet.
Die Anfangsbedingung ergibt die Gleichung

$$y(0) = -(2\cdot 0 + 12\cdot 0 + 16\cdot 0 + s)^{\frac{1}{4}}\cdot 1 \overset{!}{=} -1$$

mit Lösung $s = 1$.
Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; -(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &=\; -(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

die Lösung von $y' = \dfrac{y}{x^2-1} + \dfrac{x-1}{y^3}$ auf $\left]-1, 1\right[$ zur Anfangsbedingung $y(0) = -1$.
Probe. Einerseits ist

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{x^2-1} + \frac{x-1}{y(x)^3} \;&=\; -y(x)(x+1)^{-1}(1-x)^{-1} - (1-x)y(x)^{-3} \\ &=\; (2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad\; +(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}} \\ &=\; \frac{2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1 + (x+1)^3}{(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{3}{4}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &=\; \frac{2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{3}{4}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &=\; \frac{x^3 + 5x^2 + 15x + 16\ln(1-x) + 2}{(2x^2 + 12x + 16\ln(1-x) + 1)^{\frac{3}{4}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}}\;. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{1}{4}(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{-\frac{3}{4}}\left(4x+12-\frac{16}{1-x}\right)\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad -\frac{1}{2}(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-(x+3-\frac{4}{1-x})\cdot\frac{1-x}{x+1}\cdot(x+1)^2+2x^2+12x+16\ln(1-x)+1}{(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)^2} \\
&= \frac{x^3+3x^2-x-3+4x+4+2x^2+12x+16\ln(1-x)+1}{(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)^2} \\
&= \frac{x^3+3x^2+3x+1+2x^2+12x+16\ln(1-x)+1}{(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)^2} \\
&= \frac{x^3+5x^2+15x+16\ln(1-x)+2}{(2x^2+12x+16\ln(1-x)+1)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}\ .
\end{aligned}
$$

Das ist dasselbe.
Weiterhin ist $y(0) \;=\; -(0+0+0+1)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{1-0}{0+1}\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; -1.$

Hausaufgabe 99 Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x} - 2x.$$

(a) Bestätigen Sie, dass $\eta(x) := -x^2$ eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$. Probe!

Lösung.

(a) Es ist

$$\frac{\eta(x)^2}{x^3} + \frac{\eta(x)}{x} - 2x \;=\; \frac{x^4}{x^3} - \frac{x^2}{x} - 2x \;=\; -2x \;=\; \eta'(x).$$

Also ist η ein partikuläre Lösung.

(b) Es handelt sich um ein Riccatische Differentialgleichung mit

$$a(x) = x^{-3}, \qquad b(x) = x^{-1} \qquad \text{und} \qquad c(x) = -2x.$$

Nach (a) haben wir die partikuläre Lösung $\eta(x) := -x^2$.

Wir substituieren $y = \eta + \frac{1}{v}$ und erhalten folgende lineare Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} v' &= -(2a(x)\eta(x) + b(x))v - a(x) \\ &= -(2x^{-3} \cdot (-x^2) + x^{-1})v - x^{-3} \\ &= \frac{v}{x} - \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $v' = v/x$ hat wegen einerseits der konstanten Lösung 0 und wegen andererseits $[\ln(|v|)] = \int \frac{1}{v}\mathrm{d}v = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]$ die Lösung

$$v = dx$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung setzen wir $v = d(x)x$ an.

Dies führt auf $d'(x)x = -x^{-3}$, also auf $d'(x) = -x^{-4}$ und damit auf

$$d(x) = \frac{1}{3}x^{-3} + s$$

mit $s \in \mathbb{R}$.

Wir erhalten also

$$v(x) \;=\; d(x)x \;=\; sx + \frac{1}{3x^2}$$

mit $s \in \mathbb{R}$.

Für die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt die Rücksubstitution $y = \eta + \frac{1}{v}$ also

$$y(x) \;=\; -x^2 + \frac{1}{sx + \frac{1}{3x^2}}$$

mit $s \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingung führt auf folgende Gleichung.

$$y(1) \;=\; -1 + \frac{1}{s + \frac{1}{3}} \;\overset{!}{=}\; 1$$

Also ist $s + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ und damit $s = \frac{1}{6}$.

Insgesamt ist damit also

$$y(x) \;=\; -x^2 + \frac{1}{\frac{1}{6}x + \frac{1}{3x^2}} \;=\; -x^2 + \frac{6x^2}{x^3+2} \;=\; -\frac{x^2(x^3-4)}{x^3+2}$$

die Lösung von $y' = \dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{y}{x} - 2x$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Probe. Einerseits ist

$$\begin{aligned}
\frac{y(x)^2}{x^3} + \frac{y(x)}{x} - 2x \;&=\; \frac{1}{x}\left(\frac{y(x)^2}{x^2} + y(x)\right) - 2x \\
&=\; \frac{1}{x}\left(\frac{x^2(x^3-4)^2}{(x^3+2)^2} - \frac{x^2(x^3-4)}{x^3+2}\right) - 2x \\
&=\; \frac{x(x^3-4)(x^3-4-(x^3+2))}{(x^3+2)^2} - 2x \\
&=\; -\frac{6x(x^3-4)}{(x^3+2)^2} - 2x\,.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$y'(x) \;=\; -2x + \frac{12x(x^3+2) - 6x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} \;=\; -2x + \frac{24x - 6x^4}{(x^3+2)^2}\,.$$

Das ist dasselbe.

Weiterhin ist $y(1) \;=\; -\frac{1-4}{1+2} \;=\; 1$.