Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Zu einer Wiederholungsprüfung gehört unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.04.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(2\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (7 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $\mathrm{T}_2(f, x, 2)$.

(b) Bestimmen Sie das Restglied $\mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| \leqslant C \cdot |x - 2|^3$ für $x \in [1, 3]$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Überprüfen Sie zur Probe das Ergebnis aus (a) mittels einer geeigneten Matrixmultiplikation.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

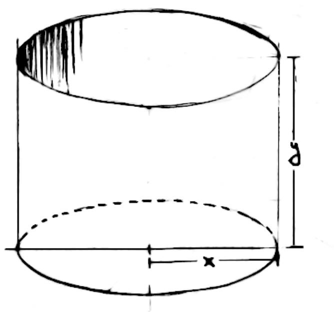
Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein zylinderförmiges Gefäß mit Grundfläche, aber ohne Deckel soll hergestellt werden.
Die Grundfläche sei eine Kreisfläche von Radius x. Die Höhe des Gefäßes sei y.
Hierbei seien $x,\, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Längeneinheit ist Meter.



Der Inhalt $f(x, y) := \pi x^2 + 2\pi xy = \pi(x^2 + 2xy)$ der Gefäßoberfläche soll möglichst klein werden.

Das Volumen des Gefäßes sei zu $\pi x^2 y = \pi$ vorgegeben.
Also ist mit $g(x, y) := \pi x^2 y - \pi = \pi(x^2 y - 1)$ die Bedingung $g(x, y) = 0$ zu erfüllen.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Ist die Flachstelle aus (a) eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe 7 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge

$$\{\, \sigma \in \mathrm{S}_3 \,:\, \sigma \circ (1,2) = (2,3) \,\} \;=$$

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$\{\, \sigma \in \mathrm{S}_3 \,:\, \sigma = \sigma^3 \wedge \sigma \neq \mathrm{id} \,\} \;=$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\,.$

(a) Schreiben Sie das in Vektorform gegebene Differentialgleichungssystem als ein System von einzelnen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$y(x) \;=$$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge $\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, : \, t \in [0, \pi] \}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgende Menge.

$$\{x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : x^2 = 1\} \;=$$

Aufgabe 11 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \; : \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal} \right\} \;=$$

(b) Seien $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Berechnen Sie:

$$(v + w)^{\mathrm{t}} \, (v \times w) + v^{\mathrm{t}} \, v \;=$$

Berechnen Sie den Cosinus des von v und w eingeschlossenen Winkels α.

$$\cos(\alpha) \;=$$
