Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Zu einer Wiederholungsprüfung gehört unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.04.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(2\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir substituieren $u = \ln(x)$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$. Nachfolgend integrieren wir partiell.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(2\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \ln(2u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int 1\cdot\ln(2u)\,\mathrm{d}u \\
&= [u\cdot\ln(2u)] - \int u\cdot\frac{1}{2u}\cdot 2\,\mathrm{d}u \\
&= [u\cdot\ln(2u) - u] \\
&= [\ln(x)\cdot\ln(2\ln(x)) - \ln(x)] \\
&= [(\ln(\ln(x)) + \ln(2) - 1)\ln(x)]\ .
\end{aligned}$$

(b) Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ führt auf $1 = Ax + A + Bx$, also auf $A = 1$ und $B = -1$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{v\to+\infty} \int_1^{v} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{v\to+\infty} [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^v \\
&= \lim_{v\to+\infty} [\ln(\tfrac{x}{x+1})]_1^v \\
&= \lim_{v\to+\infty} \ln(\tfrac{v}{v+1}) - \ln(1/2) \\
&= \ln(1) - \ln(1/2) \\
&= \ln(2)\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & -X \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -X & 0 \\ 1 & -X \end{pmatrix} \\ &= X^3(X-1)\ . \end{aligned}$$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$.

Dabei ist $\mathrm{aV}_A(0) = 3$ und $\mathrm{aV}_A(1) = 1$.

Insbesondere ist auch $\mathrm{gV}_A(1) = 1$, also $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{H}_A(1)$.

Zu $\lambda_1 = 0$. Es wird

$$A_{(1)} \;=\; A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dann wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ zur Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Da $\dim(\mathrm{H}_A(0)) = \mathrm{aV}_A(0) = 3$ ist, folgt $\mathrm{H}_A(0) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir bilden eine Basis von $\mathrm{H}_A(0)$ aus Hauptvektorketten.

Dazu setzen wir $y_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es wird $A_{(1)} y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also können wir $y_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ setzen. Wir erhalten die Hauptvektorketten

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, die zusammen eine Basis von $\mathrm{H}_A(0)$ bilden.

Zu $\lambda_2 = 1$. Es wird

$$A_{(2)} = A - \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat $\mathrm{H}_A(1) = \mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A_{(2)})$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Gesucht ist eine Basis aus Hauptvektorketten. Mit $y_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Hauptvektorkette. Diese ist auch eine Basis von $\mathrm{H}_A(1)$.

Zusammensetzen zur Matrix S. Mit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$J = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Jordanform.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $\mathrm{T}_2(f, x, 2)$.

(b) Bestimmen Sie das Restglied $\mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| \leqslant C \cdot |x - 2|^3$ für $x \in [1, 3]$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^{-1} \\ f'(x) & = & -x^{-2} \\ f''(x) & = & 2x^{-3} \\ f'''(x) & = & -6x^{-4}\,. \end{array}$$

Damit wird

$$\begin{array}{rcl} f(2) & = & \tfrac{1}{2} \\ f'(2) & = & -\tfrac{1}{4} \\ f''(2) & = & \tfrac{1}{4}\,. \end{array}$$

Also ist

$$\mathrm{T}_2(f, x, 2) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2\,.$$

(b) Für $\vartheta \in [0, 1]$ wird

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta) & = & \frac{f'''(2+\vartheta(x-2))}{3!}(x-2)^3 \\ & = & \frac{-6(2+\vartheta(x-2))^{-4}}{6}(x-2)^3 \\ & = & -(2+\vartheta(x-2))^{-4} \cdot (x-2)^3\,. \end{array}$$

(c) Für ein $\vartheta \in [0, 1]$ und $x \in [1, 3]$ ergibt sich dank Satz von Taylor

$$f(x) \;=\; \mathrm{T}_2(f, x, 2) + \mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta)$$

und also

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| & = & |\mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta)| \\ & = & |2+\vartheta(x-2)|^{-4} \cdot |x-2|^3 \\ & \leqslant & 1 \cdot |x-2|^3\,, \end{array}$$

letzteres, da $|\vartheta(x-2)| \leqslant |x-2| \leqslant 1$ und also $2 + \vartheta(x-2) \geqslant 1$.

Wir können also $C := 1$ wählen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Überprüfen Sie zur Probe das Ergebnis aus (a) mittels einer geeigneten Matrixmultiplikation.

Lösung.

(a) Wir rechnen wie folgt, unter Beachtung von $\alpha^2 = 1 + \alpha$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \end{array}\right)$$

Folglich ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & 1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Wir rechnen zur Probe $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_3$.

Alternativ kann man auch $A \cdot A^{-1} = \mathrm{E}_3$ nachrechnen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

Lösung. Es handelt sich um eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung.

Wir substituieren daher $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, also $y(x) = u(x) \cdot x$. Es ist $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$.

Unsere Differentialgleichung wird zu

$$u'x + u \ = \ u^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

also zu

$$u'x \ = \ u^2 - u + \frac{1}{4} \, .$$

Diese ist separierbar:

$$\frac{u'}{u^2 - u + \frac{1}{4}} = \frac{1}{x}$$

Zu erfüllen wird

$$\int \frac{1}{u^2 - u + \frac{1}{4}} \, \mathrm{d}u \ = \ \int \frac{u'}{u^2 - u + \frac{1}{4}} \, \mathrm{d}x \ \stackrel{!}{=} \ \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Einerseits ist, unter Berücksichtigung von $x \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = [\ln(x)].$$

Andererseits ist $u^2 - u + \frac{1}{4} = (u - \frac{1}{2})^2$ und damit

$$\int \frac{1}{u^2 - u + \frac{1}{4}} \, \mathrm{d}u \ = \ \int \frac{1}{(u - \frac{1}{2})^2} \, \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u - \frac{1}{2}} \right] .$$

Für ein $c \in \mathbb{R}$ sollte also

$$\ln(x) + c \ = \ -\frac{1}{u - \frac{1}{2}}$$

sein. Auflösen nach u gibt

$$-\frac{1}{\ln(x) + c} \ = \ u - \frac{1}{2} \ ,$$

also

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x) + c} \ = \ u \ ,$$

also

$$y \ = \ ux \ = \ \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln(x) + c} \ .$$

Einsetzen der Anfangsbedingung gibt

$$0 \ \stackrel{!}{=} \ y(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(1) + c} \ ,$$

woraus $c = 2$ folgt.

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}$ auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 0$ gegeben durch

$$y \;=\; y(x) \;=\; \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln(x)+2} \,.$$

Probe. Zum einen ist

$$y' \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot (\ln(x)+2) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x)+2)^2} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+2} + \frac{1}{(\ln(x)+2)^2} \,.$$

Zum anderen ist

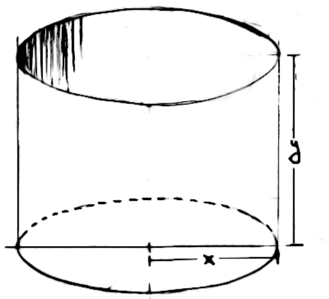
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4} \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+2}\right)^2 + \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4} - \frac{1}{\ln(x)+2} + \frac{1}{(\ln(x)+2)^2} + \frac{1}{4} \,.$$

Das ist dasselbe.

Weiterhin gilt $y(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(1)+2} = 0$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein zylinderförmiges Gefäß mit Grundfläche, aber ohne Deckel soll hergestellt werden.
Die Grundfläche sei eine Kreisfläche von Radius x. Die Höhe des Gefäßes sei y.
Hierbei seien $x,\, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Längeneinheit ist Meter.



Der Inhalt $f(x,y) := \pi x^2 + 2\pi xy = \pi(x^2 + 2xy)$ der Gefäßoberfläche soll möglichst klein werden.

Das Volumen des Gefäßes sei zu $\pi x^2 y = \pi$ vorgegeben.
Also ist mit $g(x,y) := \pi x^2 y - \pi = \pi(x^2 y - 1)$ die Bedingung $g(x,y) = 0$ zu erfüllen.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Ist die Flachstelle aus (a) eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Wir bestimmen den Gradienten und die Hessematrix von f, wobei $f(x,y) = \pi(x^2 + 2xy)$.

$$\nabla_f(x,y) = \pi \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(x,y) = \pi \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den Gradienten und die Hessematrix von g, wobei $g(x,y) = \pi(x^2 y - 2)$.

$$\nabla_g(x,y) = \pi \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_g(x,y) = \pi \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Dies führt nach Kürzen des Faktors π auf das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \lambda_1 \cdot 2xy \\ 2x &= \lambda_1 \cdot x^2 \\ x^2 y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 = \dfrac{2}{x}$. Einsetzen in die erste Gleichung gibt

$$2x + 2y \;=\; 4y\,.$$

Es folgt

$$x \;=\; y\,.$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich nun

$$x^3 \;=\; 1\,.$$

Es folgt

$$x \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad y \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 \;=\; 2\,.$$

Insgesamt ist damit $(1,1)$ die einzige Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Wegen $\nabla_g(1,1) = \pi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ können wir $U := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ wählen. Weiter ist

$$H \;=\; \mathrm{H}_f(1,1) - \lambda_1 \mathrm{H}_g(1,1) \;=\; \pi \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\pi \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; -\pi \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit wird

$$U^{\mathrm{t}} H U \;=\; -\pi \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; -\pi \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\pi \end{pmatrix} ,$$

was positiv definit ist. Damit ist $(1,1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 7 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge

$$\{\,\sigma \in \mathrm{S}_3 \,:\, \sigma \circ (1,2) = (2,3)\,\} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\right\}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$\{\,\sigma \in \mathrm{S}_3 \,:\, \sigma = \sigma^3 \wedge \sigma \neq \mathrm{id}\,\} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\,.$

(a) Schreiben Sie das in Vektorform gegebene Differentialgleichungssystem als ein System von einzelnen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

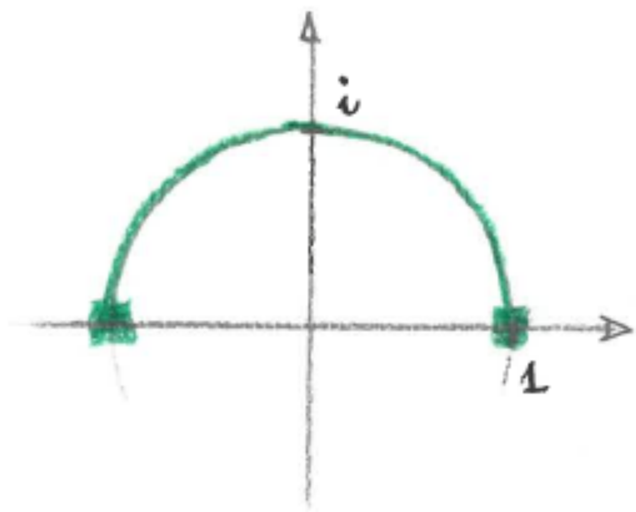
$$y_1'(x) = y_1(x) + 2x \cdot y_2(x)$$
$$y_2'(x) = y_2(x)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$y(x) \;=\; \begin{pmatrix} x^2 \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge $\{\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \;:\; t \in [0,\pi] \,\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Einzuzeichnende Menge in grün.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgende Menge.

$$\{x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : x^2 = 1\} \;=\; \boxed{\{1, 3, -1, -3\}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \;:\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal} \right\} \;=\; \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

(b) Seien $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Berechnen Sie:

$$(v+w)^{\mathrm{t}}\,(v \times w) + v^{\mathrm{t}}\,v \;=\; \boxed{2}$$

Berechnen Sie den Cosinus des von v und w eingeschlossenen Winkels α.

$$\cos(\alpha) \;=\; \boxed{\frac{1}{2}}$$