Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2021** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2021** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \sin(2x)^3 \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{3}{x^2 - x - 2} \,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir formen um.

$$\begin{aligned}
\sin(2x)^3 &= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\right)^3 \\
&= \frac{1}{8(-\mathrm{i})}(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}) \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}((\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}) - 3(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})) \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(6x) - 6\mathrm{i}\sin(2x)) \\
&= \frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(6x)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int \sin(2x)^3 \,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(6x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[-\frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{24}\cos(6x)\right]$$

Alternative Lösung. Es wird

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \sin(2x)^3 \,\mathrm{d}x &= \textstyle\int \sin(2x)\cdot\sin(2x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \textstyle\int \sin(2x)\cdot(1 - \cos(2x)^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \textstyle -\frac{1}{2}\int(-2)\sin(2x)\cdot(1 - \cos(2x)^2)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u = \cos(2x)}{=} \textstyle -\frac{1}{2}\int 1 - u^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \textstyle -\frac{1}{2}[u - \frac{1}{3}u^3] \\
&= \textstyle -\frac{1}{2}[\cos(2x) - \frac{1}{3}\cos(2x)^3] \\
&= \textstyle [-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{6}\cos(2x)^3]\;.
\end{aligned}$$

(b) Wir faktorisieren $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

an. Multiplikation mit $(x+1)(x-2)$ und Sortierung der Potenzen ergibt

$$3 \overset{!}{=} (A+B)x - 2A + B\,.$$

Koeffizientenvergleich führt auf das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
A + B &= 0 \quad (\text{Koeffizient bei } x^1) \\
-2A + B &= 3 \quad (\text{Koeffizient bei } x^0) \quad .
\end{aligned}
$$

Subtraktion der Gleichungen führt auf $-3A = 3$, also $A = -1$. Daraus folgt $B = 1$.

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_3^{+\infty} \frac{3}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t \to +\infty} \int_3^t \frac{3}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t \to +\infty} \int_3^t \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left[\ln(x-2) - \ln(x+1)\right]_3^t \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\right]_3^t \\
&= \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t-2}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \ln(4) + \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1 - \frac{2}{t}}{1 + \frac{1}{t}}\right) \\
&= \ln(4) + \ln\left(\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{t}}{1 + \frac{1}{t}}\right) \\
&= \ln(4) + \ln(1) \\
&= \ln(4)\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (7 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & -4 & 0 & 6 \\ 1 & -4-X & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -X & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4-X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -X & -4 \\ 1 & -4-X \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -X & -4 \\ 1 & -4-X \end{pmatrix}$$
$$= \big((-X)(-4-X)+4\big)^2 = (X^2+4X+4)^2 = (X+2)^4$$

Der einzige Eigenwert von A ist also $\lambda_1 = -2$.

Seine algebraische Vielfachheit ist $\mathrm{aV}_A(-2) = 4$.

Zu $\lambda_1 = -2$. Es wird

$$A_{(1)} \;=\; A + 2\mathrm{E}_4 \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{E}_A(-2) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Dann wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{E}_A(-2)$ zu einer Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Dann wird

$$A_{(1)}^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ zu einer Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ des Hauptraums $\mathrm{H}_A(-2) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) = \mathbb{Q}^{4\times 1}$.

Gesucht ist eine Basis aus Hauptvektorketten. Dazu setzen wir $y_{3,1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\begin{aligned} A_{(1)} y_{3,1} &= A_{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A_{(1)}^2 y_{3,1} &= A_{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir ergänzen $A_{(1)}^2 y_{3,1}$ mit $y_{1,1} := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathrm{E}_A(-2)$.

Damit erhalten wir eine Hauptvektorkette der Länge 3 und eine der Länge 1.

$$\begin{aligned} &(A_{(2)}^2 y_{3,1}, A_{(2)} y_{3,1}, y_{3,1}) \\ &(y_{1,1}) \end{aligned}$$

Also ist $S := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit $J = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^4$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $\mathrm{T}_2(f, x, -1)$.

(b) Bestimmen Sie das Restglied $\mathrm{R}_2(f, x, -1, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, -1)| \leqslant C \cdot |x + 1|^3$ für $x \in [-2, 0]$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f'''(x) &= 24x\,. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 \\ f'(-1) &= -4 \\ f''(-1) &= 12\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{T}_2(f, x, -1) = 1 - 4(x + 1) + 6(x + 1)^2\,.$$

(b) Für $\vartheta \in [0, 1]$ wird

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_2(f, x, -1, \vartheta) &= \tfrac{f'''(-1+\vartheta(x+1))}{3!}(x + 1)^3 \\ &= \tfrac{24(-1+\vartheta(x+1))}{6}(x + 1)^3 \\ &= 4(-1 + \vartheta(x + 1))(x + 1)^3\,. \end{aligned}$$

(c) Für ein $\vartheta \in [0, 1]$ ergibt sich dank Satz von Taylor $f(x) = \mathrm{T}_2(f, x, -1) + \mathrm{R}_2(f, x, -1, \vartheta)$ und also

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, -1)| &= |\mathrm{R}_2(f, x, -1, \vartheta)| \\ &= |4(-1 + \vartheta(x + 1))| \cdot |x + 1|^3\,. \\ &\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leqslant} 4(1 + \vartheta|x + 1|) \cdot |x + 1|^3 \\ &\overset{\vartheta\in[0,1]}{\leqslant} 4(1 + |x + 1|) \cdot |x + 1|^3 \\ &\overset{x\in[-2,0]}{\leqslant} 4(1 + 1) \cdot |x + 1|^3 \\ &= 8 \cdot |x + 1|^3\,. \end{aligned}$$

Wir können also $C := 8$ wählen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es ist $(t_1, t_2, t_3) := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis des Unterraums $T := {}_{\mathbb{F}_5}\langle t_1, t_2, t_3 \rangle$ von $\mathbb{F}_5^{5\times 1}$.

Es ist $(u_1, u_2) := (\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis des Unterraums $U := {}_{\mathbb{F}_5}\langle u_1, u_2 \rangle$ von $\mathbb{F}_5^{5\times 1}$.

Sei $A \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$ die Matrix mit Spaltentupel $(t_1, t_2, t_3, u_1, u_2)$.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es ist $(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis des Lösungsraums $\{\, x \in \mathbb{F}_5^{5\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\}$, unterteilt als: $(\left(\begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ 2 \\ \hline -1 \\ 1 \end{array}\right))$.

Damit ist also

$$((-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

eine Basis von $T \cap U$.

Alternative Lösung. Es ist

$$((-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

eine Basis von $T \cap U$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}$$

auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.

Lösung. Es handelt sich um eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung.

Wir substituieren daher $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, also $y(x) = u(x) \cdot x$. Es ist $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$.

Unsere Differentialgleichung wird zu

$$u'x + u \;=\; 2u + u^{-1}\;,$$

also zu

$$u' \;=\; (u + u^{-1})x^{-1}.$$

Diese ist separierbar:

$$\frac{u'}{u + u^{-1}} = \frac{1}{x}$$

Zu erfüllen wird

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \;=\; \int \frac{u'}{u+u^{-1}}\,\mathrm{d}x \;\stackrel{!}{=}\; \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Einerseits ist, unter Berücksichtigung von $x \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$,

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)].$$

Andererseits ergibt die Substitution $v(u) := 1 + u^2$ mit $v'(u) = 2u$ für das andere Integral

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2v}\mathrm{d}v = [\tfrac{1}{2}\ln(|v|)] = [\tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)].$$

Für ein $c \in \mathbb{R}$ sollte also

$$\ln(x) + c = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$$

sein. Auflösen von $2\ln(x) + 2c = \ln(1+u^2)$ ergibt $x^2\mathrm{e}^{2c} = 1 + u^2$ und damit

$$x^2 d = 1 + u^2$$

für ein $d \in \mathbb{R}_{>0}$.

Damit ist $u(x) = \sqrt{x^2d - 1}$ oder $u(x) = -\sqrt{x^2d-1}$. Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = x \cdot \sqrt{x^2d - 1}$$

oder

$$y(x) = -x \cdot \sqrt{x^2d - 1}.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = -2$ verlangt das negative Vorzeichen. Dies führt auf die Gleichung

$$y(1) = -\sqrt{d-1} \stackrel{!}{=} -2$$

und also auf $d = 5$.

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung $y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}$ auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$ gegeben durch

$$y(x) \;=\; -x \cdot \sqrt{5x^2 - 1}.$$

Probe. Zum einen ist

$$y'(x) = (-1) \cdot \sqrt{5x^2 - 1} + (-x) \cdot \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{-5x^2 + 1 - 5x^2}{\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{1 - 10x^2}{\sqrt{5x^2 - 1}}\,.$$

Zum anderen ist

$$2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = -2\sqrt{5x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{-10x^2 + 2 - 1}{\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{1 - 10x^2}{\sqrt{5x^2 - 1}}\,.$$

Das ist dasselbe.

Weiterhin gilt $y(1) = -\sqrt{5 - 1} = -2$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

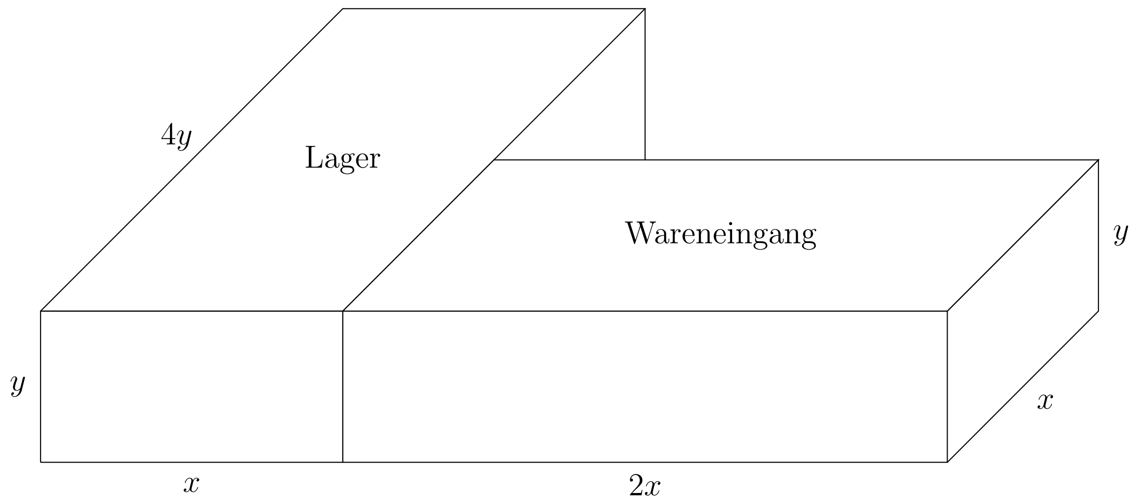
Es wird ein Depot errichtet, welches aus zwei quaderförmigen Gebäudeteilen besteht:
Das Lager hat Breite x, Höhe y und Länge $4y$.
Der Wareneingang hat Breite $2x$, Höhe y und Länge x.
Siehe untenstehende Skizze. Hierbei seien $x,\ y \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Maßeinheit ist Meter.

Die Vorderseite und die Seitenwand des Wareneingangs sollen zusammen möglichst groß werden, um als Außenfläche für die Warenannahme bestmöglich zu dienen.
Die Außenfläche für die Warenannahme ist also $f(x,y) := 2 \cdot x \cdot y + x \cdot y$.

Als Kapazitätsvorgabe muss das Volumen beider Gebäudeteile zusammen genau $128\,\mathrm{m}^3$ betragen. Das Gesamtvolumen ist $x \cdot 4y \cdot y + 2x \cdot x \cdot y$. Also muss mit $g(x,y) := x \cdot 4y \cdot y + 2x \cdot x \cdot y - 128$ die Bedingung $g(x,y) = 0$ erfüllt sein.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Ist die Flachstelle aus (a) eine lokale Maximalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?



Lösung.

(a) Wir bestimmen den Gradienten und die Hessematrix von f, wobei $f(x,y) = 3xy$.

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y \\ 3x \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den Gradienten und die Hessematrix von g, wobei $g(x,y) = 4xy^2 + 2x^2y - 128$.

$$\nabla_g(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2 + 4xy \\ 8xy + 2x^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 8y + 4x \\ 8y + 4x & 8x \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das folgende Lagrange-Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 3y &= \lambda_1(4y^2 + 4xy) \\ 3x &= \lambda_1(8xy + 2x^2) \\ 4xy^2 + 2x^2y - 128 &= 0 \end{aligned}$$

Da x und y ungleich Null sind, sind die ersten beiden Gleichungen äquivalent zu

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda_1(4y + 4x) \\ 3 &= \lambda_1(8y + 2x) \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt $\lambda_1(2x - 4y) = 0$. Also ist $\lambda_1 = 0$ oder $x = 2y$.

Einsetzen von $\lambda_1 = 0$ in die Gleichung $3 = \lambda_1(4y + 4x)$ ergibt $3 = 0$, was nicht sein kann. Also gilt $x = 2y$.

Setzen wir dies in die Gleichung $4xy^2 + 2x^2y - 128 = 0$ ein, erhalten wir $16y^3 = 128$ und damit $y = 2$ und $x = 4$. Die Gleichung $3 = \lambda_1(4y + 4x)$ ergibt schließlich noch $\lambda_1 = \frac{1}{8}$. Insgesamt ist damit $(4, 2)$ die einzige Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Wegen $\nabla_g(4, 2) = \begin{pmatrix} 48 \\ 96 \end{pmatrix}$ können wir $U := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ wählen. Weiter ist

$$H = \mathrm{H}_f(4, 2) - \lambda_1 \mathrm{H}_g(4, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Mit $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird $U^{\mathrm{t}}HU = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$, was negativ definit ist. Damit ist $(4, 2)$ eine lokale Maximalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe 7 (2 Punkte) Auf $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation $(\approx) := \{(1, 5), (3, 2), (4, 5)\}$ gegeben. Sei $(\sim)$ die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation. Bestimmen Sie $(\sim)$.

$(\sim)$	1	2	3	4	5
1	$\times$			$\times$	$\times$
2		$\times$	$\times$		
3		$\times$	$\times$		
4	$\times$			$\times$	$\times$
5	$\times$			$\times$	$\times$

Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(\sim)$.

$[1] = \{1,4,5\}, \qquad [2] = \{2,3\}$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

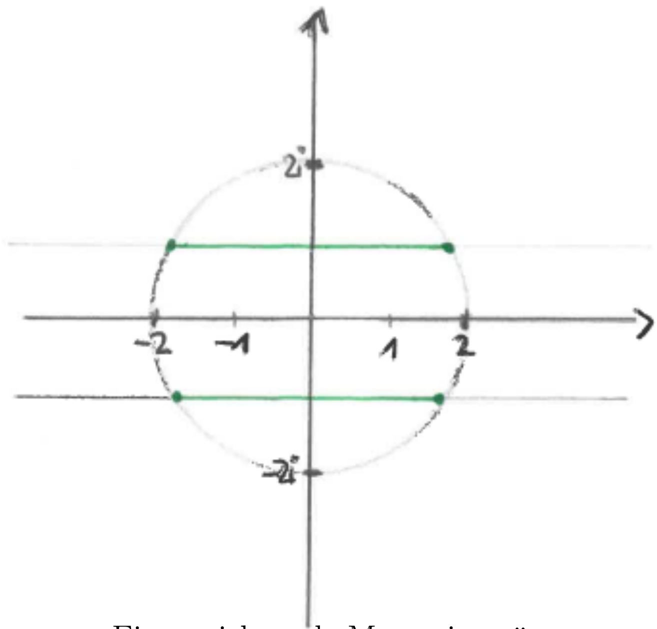
$$\exp(Ax) = \mathrm{e}^{Ax} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$y(x) = \begin{pmatrix} (2+x)\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge $\{ z \in \mathbb{C} \; : \; \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Re}(z^2)+1 \; \wedge \; |z| \leqslant 2 \}$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Einzuzeichnende Menge in grün.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgende Menge.

$$\{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + \beta = 0\} \; = \; \boxed{\{\beta^2, \beta^2 + 1\}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei $v_s := \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$. Sei $w := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$.

(a) Bestimmen Sie: $v_s \times w \; = \; \boxed{\begin{pmatrix} s \\ -2s-2 \\ 1+2s \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche der Flächeninhalt des von v_s und w aufgespannten Parallelogramms gleich $\sqrt{5}$ ist:

$$\boxed{s \in \{0, \, -\tfrac{4}{3}\}}$$

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums ${}_{\mathbb{R}}\langle v_{-1}, \, w\rangle$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$