Bsp Sei $D := \mathbb{R}_{>0}$. Sei

$$f : \overbrace{\mathbb{R}_{>0}}^{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

Wir wollen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \in D, \\ x \to +\infty}} x^{-\frac{3}{2}}$$

bestimmen.

1. Weg

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{3}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{-3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \left(\lim_{x \to +\infty} x^{-3} \right)^{\frac{1}{2}} = \ldots$$

$$\ldots \overset{\text{s.o.}}{=} 0^{\frac{1}{2}} = 0$$

<u>2. Weg</u>

Für $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ wissen wir

$$x \cdot 1 \leq x^{\frac{3}{2}} = x \cdot \sqrt{x} \leq x \cdot x,$$

und also

$$x^{-1} \geq x^{-\frac{3}{2}} \geq x^{-2}$$

Da wir diese Abschätzung nicht für ganz $D = \mathbb{R}_{>0}$ kennen, machen wir Gebrauch von ...

$$\ldots \quad E := D \cap U_1(+\infty)$$

$$= \mathbb{R}_{>1}$$

und von

$$\lim_{\substack{x \in D, \\ x \to +\infty}} x^{-\frac{3}{2}} = \lim_{\substack{x \in E, \\ x \to +\infty}} x^{-\frac{3}{2}}$$

und von

$$x^{-2} \leq x^{-\frac{3}{2}} \leq x^{-1}$$

für $x \in E$. Auf E

dürfen wir Sandwich anwenden:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-2} \overset{\text{s.o.}}{=} 0 \overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{x \to +\infty} x^{-1}$$

Es folgt: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{3}{2}} = 0$

Kurz:

$$\underbrace{x^{-2}}_{\to 0} \leq \underbrace{x^{-\frac{3}{2}}}_{\to 0} \leq \underbrace{x^{-1}}_{\to 0}$$

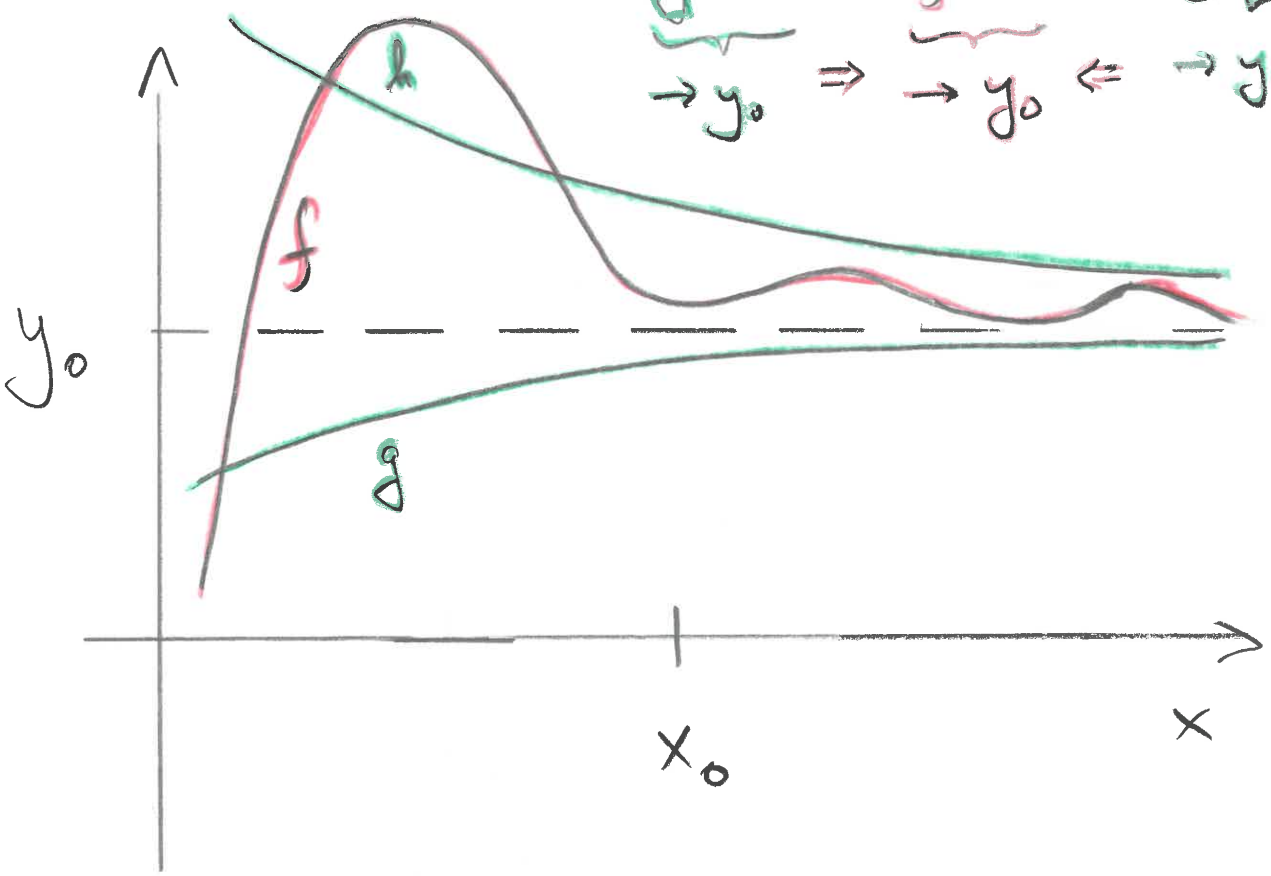
$$\Rightarrow \qquad \Leftarrow$$

Anschauung

Für $x > x_0$:

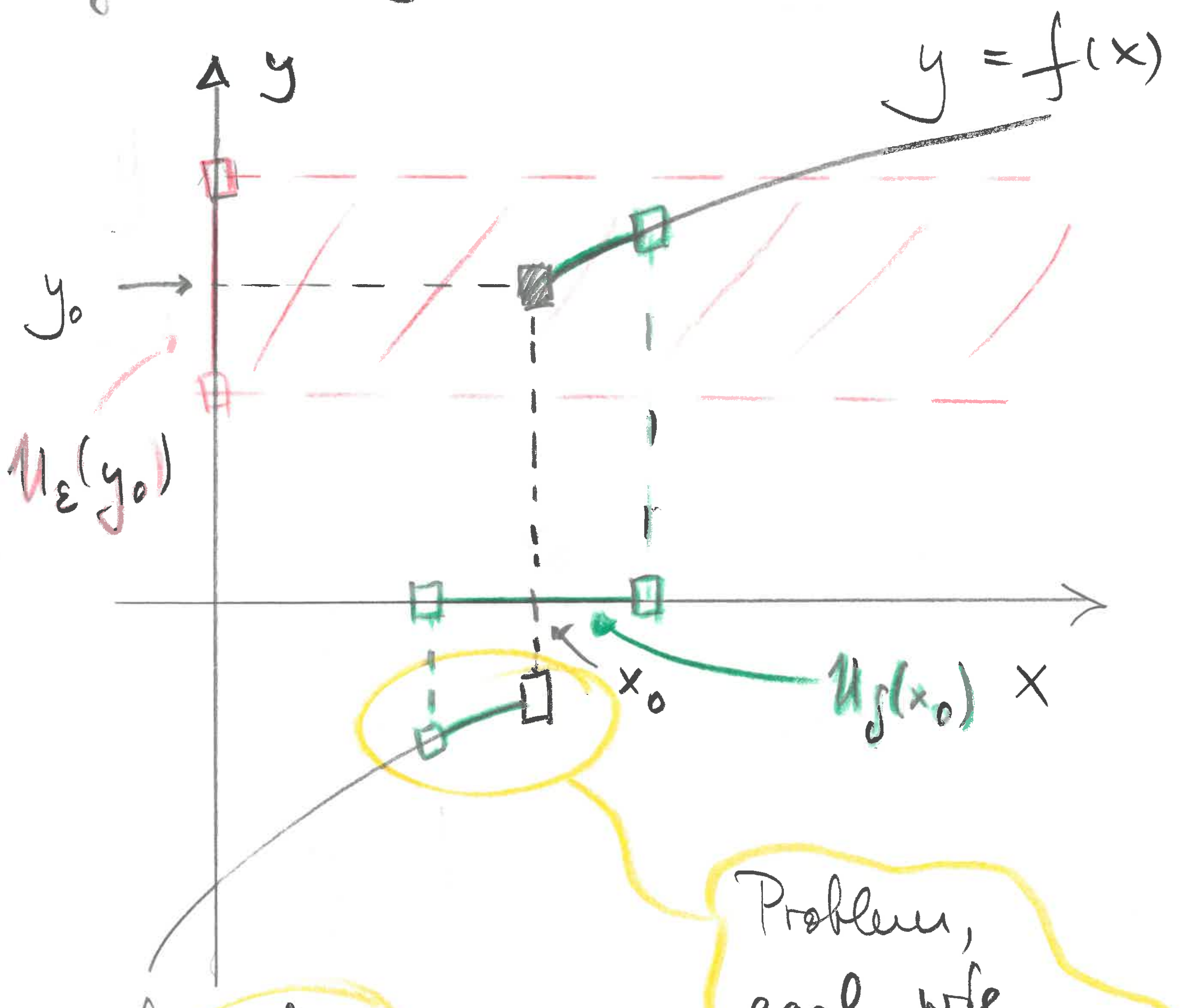
$$\underbrace{g(x)}_{\to y_0} \leq \underbrace{f(x)}_{\to y_0} \leq \underbrace{h(x)}_{\to y_0}$$

$$\Rightarrow \qquad \Leftarrow$$



Bsp

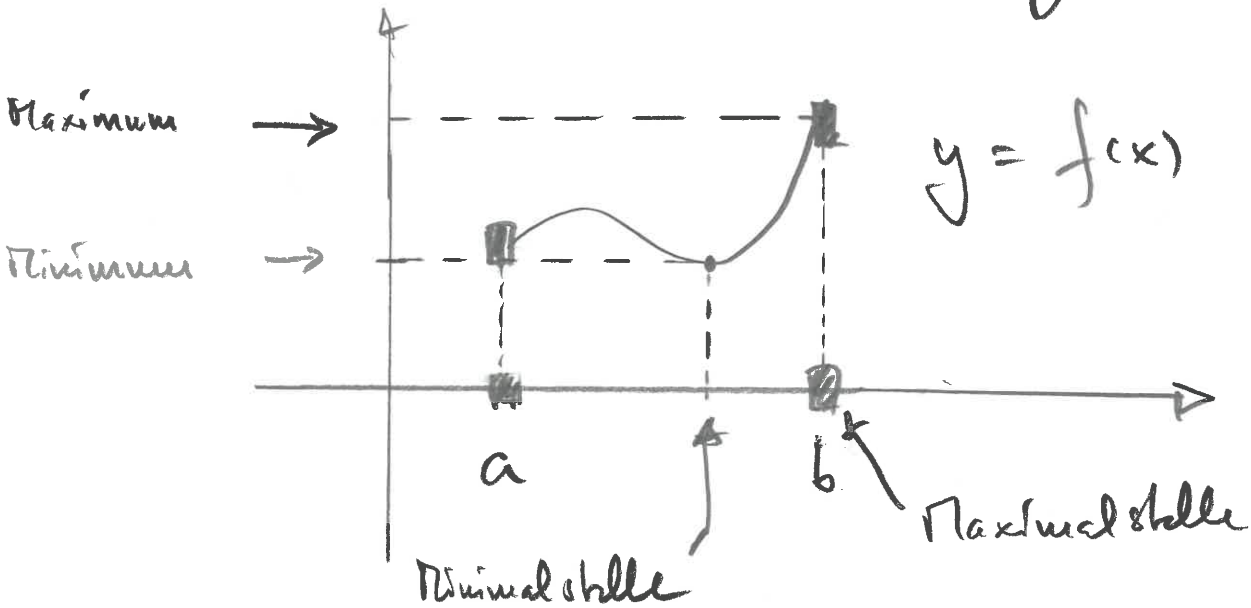
Wir wollen eine Funktion mit einer Sprungstelle im Graphen zeichnerisch an dieser Stelle auf Stetigkeit untersuchen.



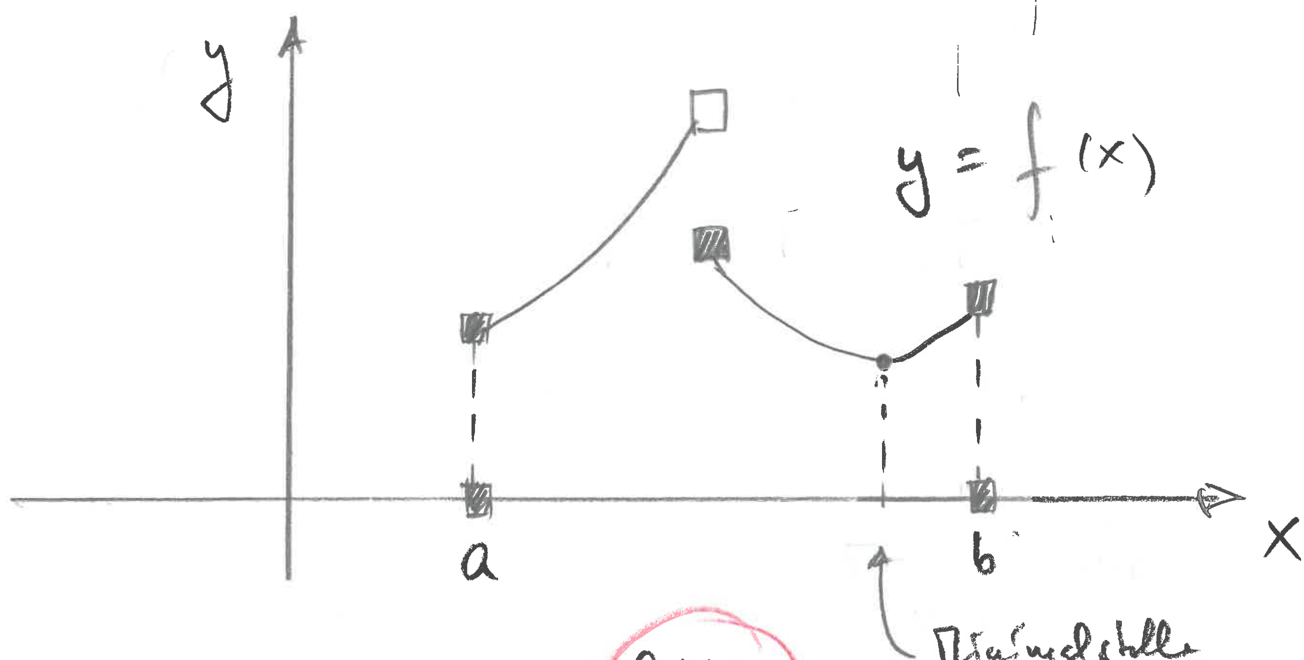
$\Rightarrow$ f nicht stetig in x_0

Bsp

(1) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig



(2) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht stetig



Maximalstelle fehlt.