Bsp $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2{,}7182818284$

wollen wir illustrieren:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}48832$$

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}59374$$

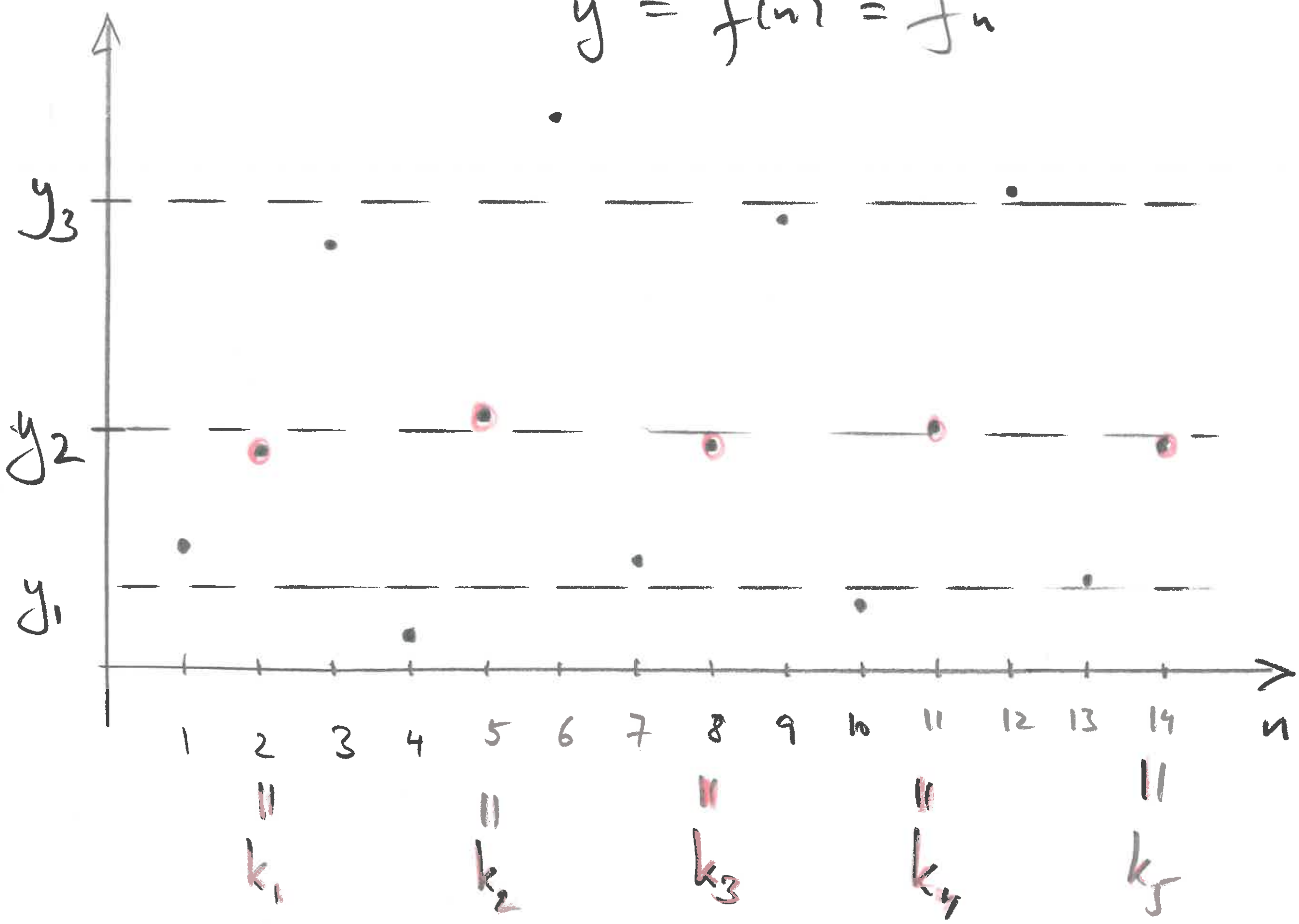
$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}70481$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}71692$$

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2{,}71815$$

Bsp Häufungspunkte graphisch

$y = f(n) = f_n$



$(f_{k_j})_{j \geq 1}$ ist eine Teilfolge, die gegen y_2 geht.

Also ist y_2 ein Häufungspunkt der Folge $(f_n)_{n \geq 1}$.

Insgesamt hat $(f_n)_{n \geq 1}$ die Häufungspunkte y_1, y_2, y_3, als Grenzwerte konvergenter oder transvergenter Teilfolgen.

Bsp Sei $a_n := \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Wir wollen

$$\limsup_{n \to \infty} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2^{-n}$$

bestimmen.

Für die Häufungspunkte brauchen wir Teilfolgen, deren Indices alle Indices $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ abdecken (ggf. bis auf endlich viele Ausnahmen.)

- Es konvergiert die Teilfolge

$$\left(a_{3k+0}\right)_{k\geq 0} = \left(\sin\left(\frac{2\pi(3k+0)}{3}\right)+2^{-(3k+0)}\right)_{k\geq 0}$$

$$= \left(\underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} + \underbrace{2^{-3k}}_{\to 0}\right)_{k\geq 0}$$

gegen 0

- Es konvergiert die Teilfolge

$$\left(a_{3k+1}\right)_{k\geq 0} = \left(\sin\left(\frac{2\pi(3k+1)}{3}\right)+2^{-(3k+1)}\right)_{k\geq 0}$$

$$= \left(\underbrace{\sin\left(2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{2^{-(3k+1)}}_{\to 0}\right)_{k\geq 0}$$

gegen $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Es konvergiert die Teilfolge

$$\left(a_{3k+2}\right)_{k\geq 0} = \left(\sin\left(\frac{2\pi(3k+2)}{3}\right) + 2^{-(3k+2)}\right)_{k\geq 0}$$

$$= \Big(\underbrace{\sin\left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right)}_{= -\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{2^{-(3k+2)}}_{\to 0}\Big)_{k\geq 0}$$

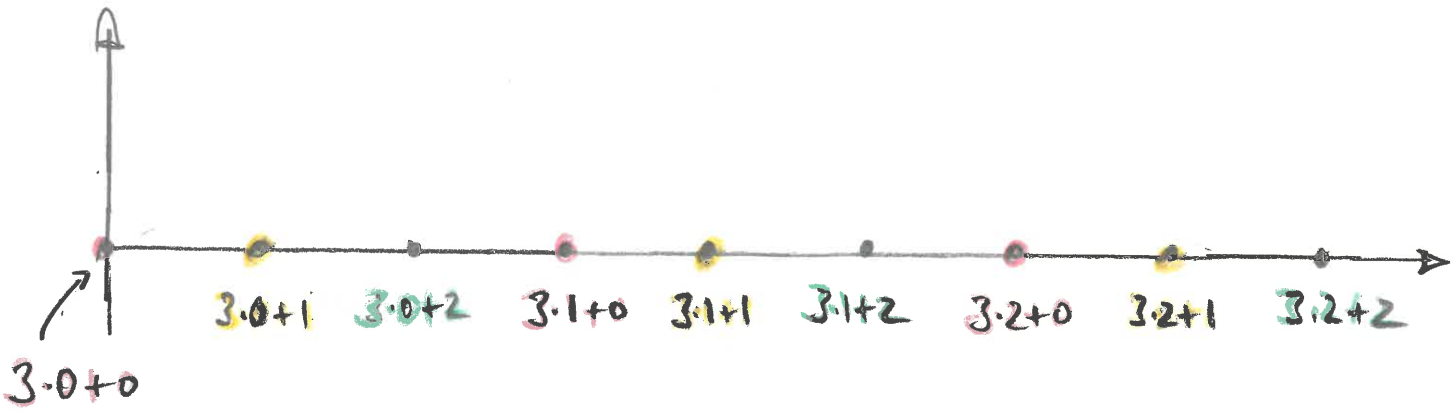
gegen $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Die auftretenden Indizes

$3k+0$, $3k+1$, $3k+2$

decken alle Indizes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ab:

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{3k+0 : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$



Also sind 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

alle Häufungspunkte der

Folge $(a_n)_{n \geq 0} = \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2^{-n} \right)_{n \geq 0}$

Somit wird

$$\limsup_{n \to \infty} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2^{-n}$$

$$= \max \left\{ 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bsp

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{9}{10}$$