<u>Bsp</u> Wir wollen berechnen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)\,n\,(n+1)}$$

Ansatz: Suchen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{2}{(n-1)\,n\,(n+1)} \overset{!}{=} \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

Multiplikation mit $(n-1)\,n\,(n+1)$:

$$2 \overset{!}{=} a\,n\,(n+1) + b\,(n-1)(n+1) + c\,n(n-1)$$

$$= (a+b+c)\,n^2 + (a-c)\,n - b$$

Koeffizientenvergleich gibt:

$$\left.\begin{aligned} n^0 &: 2 = -b \\ n^1 &: 0 = a - c \\ n^2 &: 0 = a + b + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= -2 \\ a &= c \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)\,n\,(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Für $m \geqslant 3$ wird damit

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{2}{(n-1)\,n\,(n+1)}$$

$$= \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \cancel{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$+ \cancel{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} - \cancel{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$+ \cancel{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} - \cancel{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}$$

$$+ \ldots$$

$$+ \cancel{\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)} - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \ldots$$

"Teleskop"

$$\ldots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{für } m \to \infty$$

Also: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}.$

Bsp Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \quad \text{konvergent}$$

nach Leibniz:

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{2k+1} \quad \text{gibt}$$

- $\displaystyle |a_k| = \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k+3} = |a_{k+1}|$
- $\displaystyle \lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$

Damit wissen wir, daß $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$

konvergiert. Wir wissen also, daß

ein Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

Aber wir kennen diesen Grenzwert

nicht. [Tatsächlich ist

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, aber das

übersteigt unsere Möglichkeiten.]

<u>Bsp</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ wollen wir mit

Wurzel- und Quotientenkriterium

auf Konvergenz untersuchen.

Es ist $a_k = \frac{1}{k^2}$.

- $$|a_k|^{1/k} = \left(k^{-2}\right)^{1/k}$$

$$= \left(k^{1/k}\right)^{-2} \longrightarrow 1$$

Da der Grenzwert nicht < 1 ist, macht das Wurzelkriterium hier keine Aussage.

- $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2 \longrightarrow 1$$

Da der Grenzwert nicht < 1 ist, macht das Quotienten-kriterium keine Aussage.

Sowohl Wurzel- als auch Quotientenkriterium haben nicht geholfen.

Wir wissen also (noch) nicht, ob $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

(Unten werden wir sehen, daß Konvergenz vorliegt.)

Bsp Ist $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k + 1}{3} \right)^k$ konvergent?

Wurzelkriterium:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{(-1)^k + 1}{3}$ hat Häufungspunkte

$\sqrt[2j]{|a_{2j}|} = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}$

und $\sqrt[2j+1]{|a_{2j+1}|} = 0 \to 0$.

Also ist

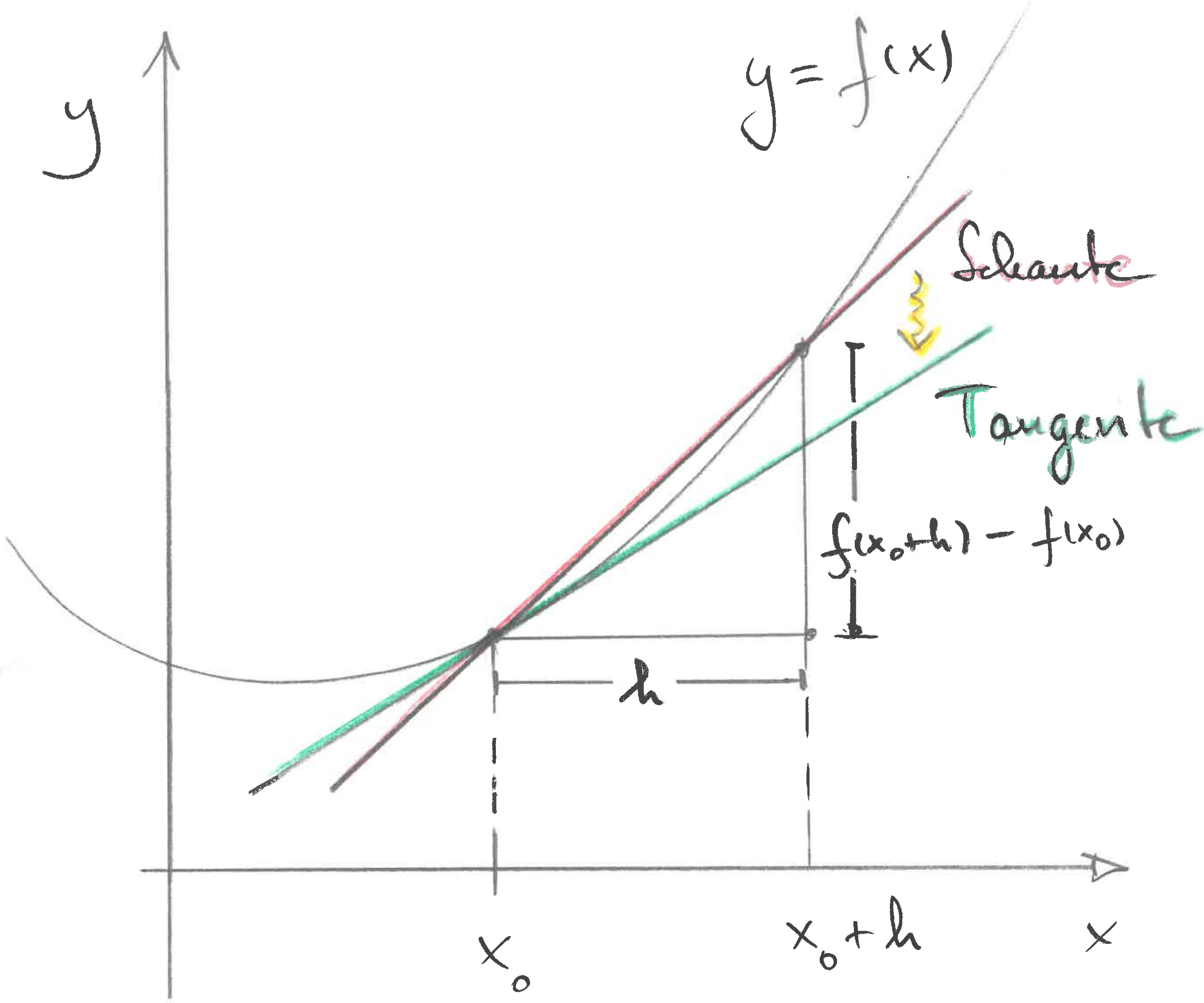
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{3} < 1,$$

Somit konvergiert die Reihe, sie konvergiert sogar absolut.

Ihr Grenzwert ist übrigens

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k + 1}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2l} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$



Sekantensteigung : $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Tangentensteigung : $f'(x_0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Bsp Sei

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Es wird

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\,(\underbrace{\sqrt{x_0+h}}_{\to \sqrt{x_0}} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} x_0^{\frac{1}{2}-1}$$