Bsp

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

$\overset{l'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \tan(x)^2}{1}$

$\overset{\text{einsetzen}}{\underset{\text{(Tangens stetig)}}{=}} \dfrac{1 + \tan(0)^2}{1} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$

$\overset{l'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \tan(x)^2 - 1}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)^2}{3x^2}$

$\overset{t \mapsto t^2}{\underset{\text{stetig}}{=}} \dfrac{1}{3} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} \right)^2 \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$

Bsp

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \frac{1}{x^2+1}$

- Wir wollen $T_2(f, x, 0)$ bestimmen.
- Wir wollen ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$

finden mit

$$\left| f(x) - T_2(f, x, 0) \right| \leq C \cdot |x|^3$$

für $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

Dazu:

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$$

$$f^{(1)}(x) = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x$$

$$f^{(2)}(x) = 2(x^2+1)^{-3}(2x)^2 - (x^2+1)^{-2}\cdot 2,$$

$$f^{(3)}(x) = -6(x^2+1)^{-4}(2x)^3 + 2(x^2+1)^{-3}\cdot 8x$$

für Restglied!

$$+2(x^2+1)^{-3}\cdot 4x$$

$$= -6(x^2+1)^{-4}(2x)^3$$

$$+ 24(x^2+1)^{-3}x$$

Also:

$$f^{(0)}(0) = (0^2+1)^{-1} = 1$$

$$f^{(1)}(0) = -(0^2+1)^{-2}\cdot 2\cdot 0 = 0$$

$$f^{(2)}(0) = 2\cdot(0^2+1)^{-3}\cdot(2\cdot 0)^2 - (0^2+1)^{-2}\cdot 2$$

$$= -2$$

Also

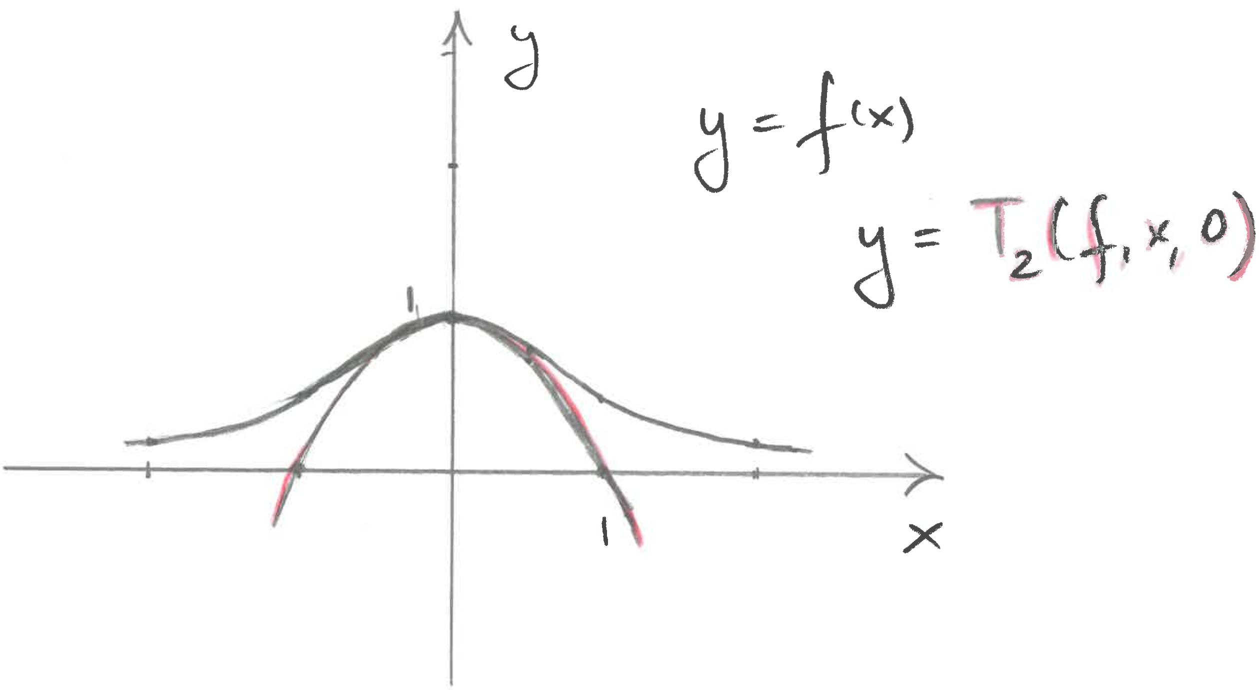
$$T_2(f, x, 0)$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0$$

$$+ \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1$$

$$+ \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 - x^2$$



Abschätzung:

$$f(x) = T_2(f, x, 0) + R_2(f, x, 0, \vartheta)$$

für ein $\vartheta \in [0,1]$.

Also

$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| = |R_2(f, x, 0, \vartheta)|$$

$$= \left| \frac{f^{(3)}(0 + \vartheta(x-0))}{3!} (x-0)^3 \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| f^{(3)}(\vartheta_x) \right| |x|^3$$

$$= \frac{1}{6} \Big| -6\left((\vartheta_x)^2 + 1\right)^{-4} (2\vartheta_x)^3$$

$$+ 24\left((\vartheta_x)^2+1\right)^{-3} (\vartheta_x) \Big| \, |x|^3$$

$$= \ldots$$

Dreiecksungleichung

$$\ldots \leq \frac{1}{6}\Big(48 \underbrace{\left((\vartheta x)^2+1\right)^{-4}}_{\leq 1} \underbrace{|\vartheta x|^3}_{\leq \frac{1}{8}} + 24 \underbrace{\left((\vartheta x)^2+1\right)^{-3}}_{\leq 1} \underbrace{|\vartheta x|}_{\leq \frac{1}{2}} \Big) \cdot |x|^3$$

$$\leq \frac{1}{6}\left(\frac{48}{8} + \frac{24}{2} \right) \cdot |x|^3$$

$$= 3|x|^3$$

Also dürfen wir $C = 3$ wählen. Man beachte: $|x|^3$ ist recht klein für $x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$