Bsp Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$$

eine differenzierbare Funktion

mit

- $f'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

- $f(0) = 1$

Wie muß diese Funktion notwendigerweise aussehen?

Wir wollen also wissen: wenn es eine solche Funktion überhaupt gibt, wie sieht sie dann aus?

1. Schritt: Wir bestimmen

die Taylorreihe $T_\infty(f, x, 0)$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) = f(x)$, also, durch Iteration, auch $f^{(n)}(x) = f(x)$ für $n \geq 0$. Folglich: Es ist

$$f^{(n)}(0) = f(0) = 1$$

für $n \geq 0$.

Somit:

$$T_\infty(f, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k .$$

<u>2. Schritt</u> Wir bestimmen

für $n \geq 0$ das Restglied

$$R_n(f, x, 0, \vartheta),$$

wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

Es wird

$$R_n(f, x, 0, \vartheta)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(0 + (x-0)\vartheta)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1}$$

$$= \frac{f(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

<u>3. Schritt</u> Gegeben $x \in \mathbb{R}$.

Wir wollen zeigen:

$$0 \overset{!}{=} f(x) - T_\infty(f, x, 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - T_n(f, x, 0) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} R_n(f, x, 0, \vartheta_n)$$

wobei $(\vartheta_n)_{n\geq 0}$ eine uns unbekannte Folge mit $\vartheta_n \in [0,1]$ für $n \geq 0$ ist.

Sei

$$m := \max\{|f(t)| : t \in [-|x|, +|x|]\},$$

bildbar, da f differenzierbar

und damit auch stetig ist.

Damit wird

$$|R_n(f, x, 0, \vartheta_n)| = \left|\frac{f(\vartheta_n x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right|$$

$$= \frac{|f(\vartheta_n x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$$\leq \frac{m}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Für $n+1 \geq \underbrace{n_0}_{\text{gewählt}} \geq 2|x|$

ist

$$0 \leq \frac{m}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{m \cdot |x|^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n_0 \cdot (n_0+1) \cdot \ldots (n+1)}$$

$$\leq \frac{m \quad |x|^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n_0 \cdot \underbrace{n_0 \cdot \ldots \cdot n_0}_{n+1-n_0 \text{ Faktoren}}}$$

$$= \frac{m \cdot |x|^{n+1}}{n_0! \cdot n_0^{n+1-n_0}}$$

$$= \frac{m \cdot n_0^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{|x|}{n_0}\right)^{n+1}$$

$$\leq \frac{m \cdot n_0^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \longrightarrow 0$$

Also auch: $\frac{m}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$.

Also auch: $|R_n(f, x, 0, \vartheta_n)| \to 0$,

Also auch:

$$\left|\lim_{n\to\infty} R_n(f, x, 0, \vartheta_n)\right|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Betrag stetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} |R_n(f, x, 0, \vartheta_n)| = 0$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, x, 0, \vartheta_n) = 0$$

Ergebnis:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar

mit $f'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

und $f(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) = T_\infty(f, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

In Kürze: • $\Leftarrow$ gilt auch.

• $\exp(x) = e^x := f(x)$