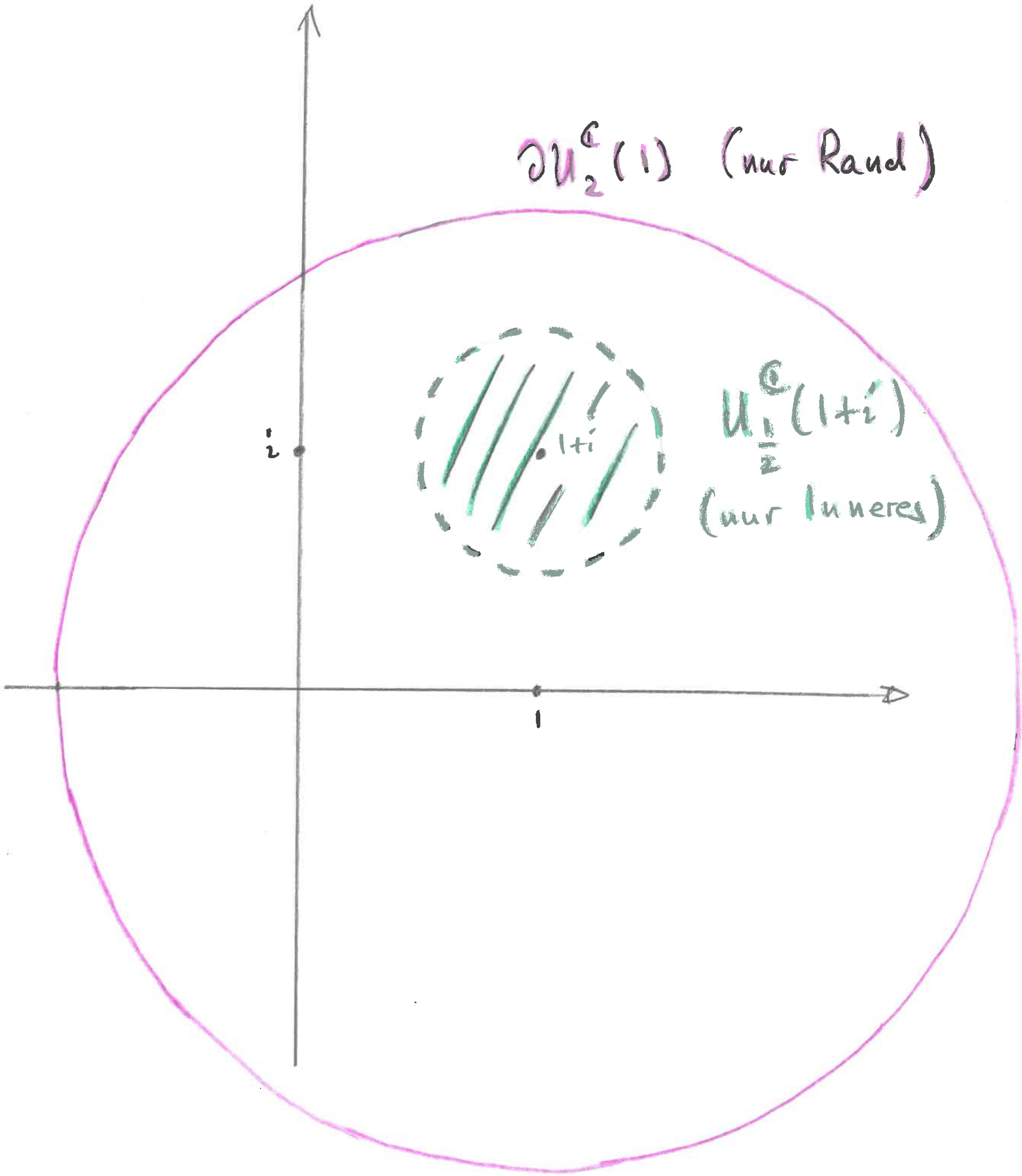
14.05.21-1

Bsp



$\partial U_2^{\mathbb{C}}(1)$ (nur Rand)
$U_{\frac{1}{2}}^{\mathbb{C}}(1+i)$
(nur Inneres)
i
$1+i$
1

<u>Bsp</u> Sei $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Dann ist $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Alternative Rechnung:

$$(x-i)(x+i) = x^2+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}$$

$$= \frac{(x+i)-(x-i)}{(x-i)(x+i)} = \frac{2i}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{(x-i)^2}+\frac{1}{(x+i)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\;\frac{-(x+i)^2+(x-i)^2}{(x-i)^2(x+i)^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\;\frac{-\cancel{x^2}-2xi-\cancel{i^2}+\cancel{x^2}-2xi+\cancel{i^2}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\;\frac{-4xi}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

<u>Bsp</u> $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3+i)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3+i}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3+i}} = \frac{3+i}{3+i-1} = \ldots$$

man beachte $\left|\frac{1}{3+i}\right|$

$$= \frac{1}{|3+i|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} < 1$$

$$\ldots = \frac{(3+i)\ (2-i)}{(2+i)\ (2-i)}$$

$$= \frac{7-i}{5}$$

<u>Bsp</u> Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$

$$= 2^0 z^{2\cdot 0} + 2^1 z^{2\cdot 1} + 2^2 z^{2\cdot 2} + 2^3 z^{2\cdot 3} + \ldots$$

$$= 2^0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 2^1 z^2 + 0 \cdot z^3$$

$$+ 2^2 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + 2^3 \cdot z^6 + 0 \cdot z^7 + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{wobei}$$

$$a_k := \begin{cases} 2^n & \text{falls } k = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wurzelfolge:

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} = \begin{cases} \left|2^{k/2}\right|^{\frac{1}{k}} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Teilfolgen:

$$|a_{2n}|^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$$

$$|a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = 0 \longrightarrow 0$$

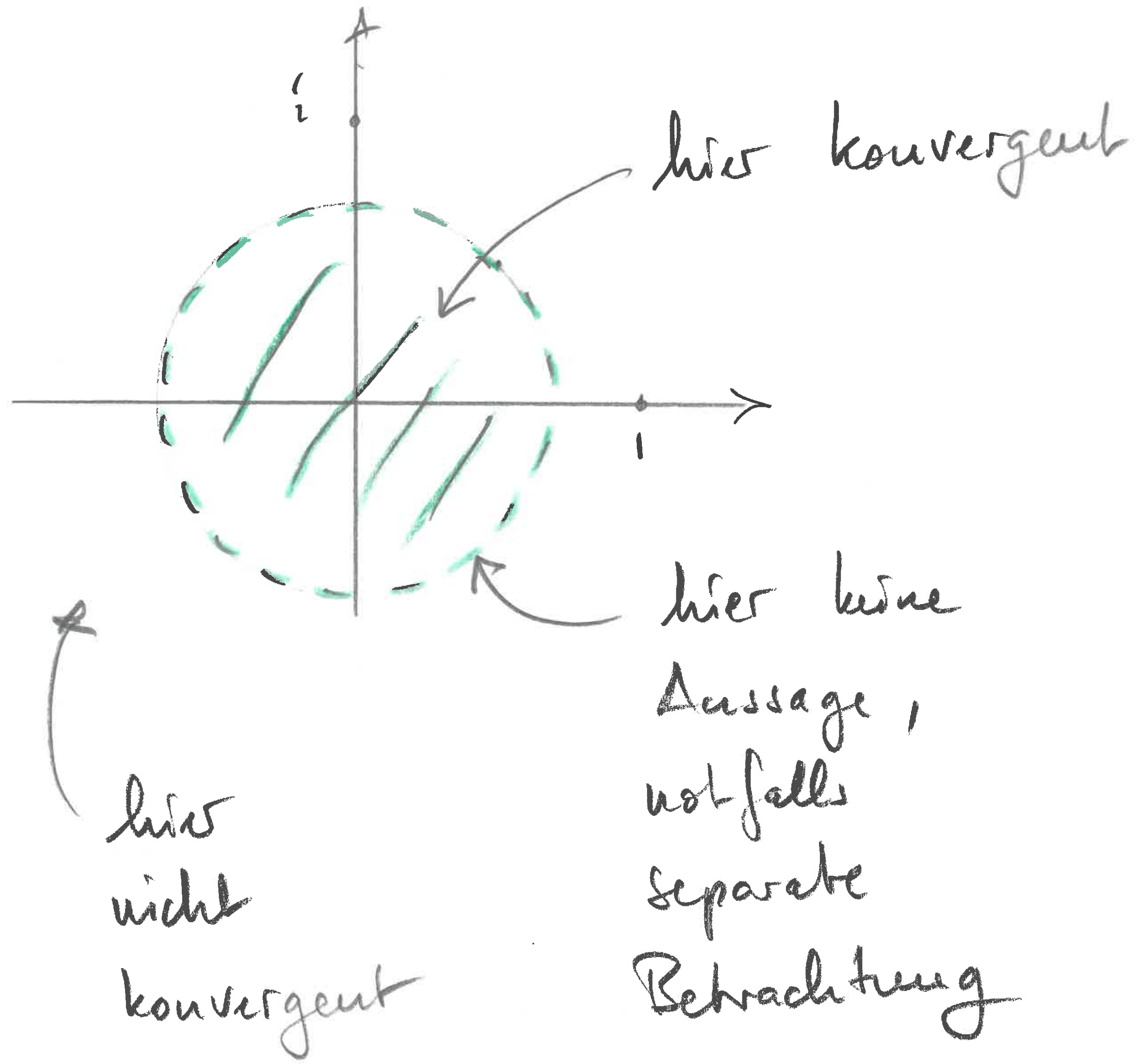
$$\rightarrow \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \max\{0, \sqrt{2}\}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ konvergiert absolut für

$z \in U^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$ und konvergiert nicht für $z \in \mathbb{C} \setminus \left(U^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \cup \partial U^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \right)$,



Bsp Es ist für $x \in]-1,+1[$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots$$

Also ist dort

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 + \ldots$$

Auf der anderen Seite ist

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

Zusammen wird also:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k$$

Des weiteren:

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$$

$$\underline{\underline{1.}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k .$$

Andererseits:

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \overset{\text{z.}}{=} \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$