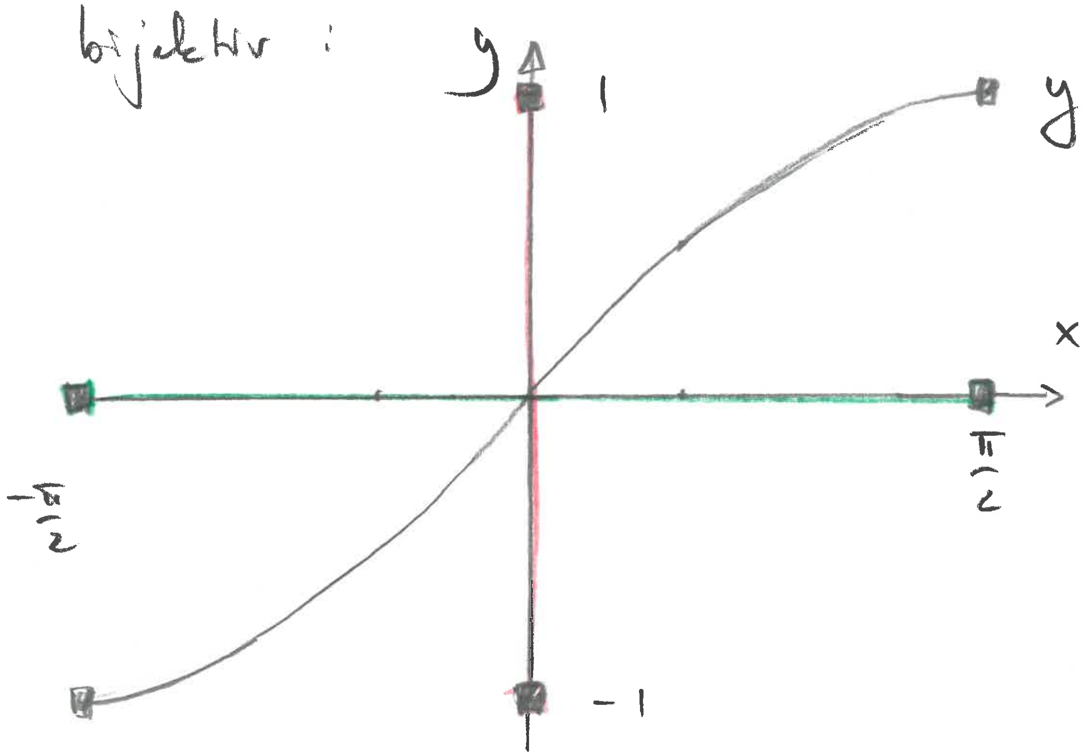
Bsp Es ist die Funktion

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] : x \longmapsto f(x) := \sin(x)$$

bijektiv :



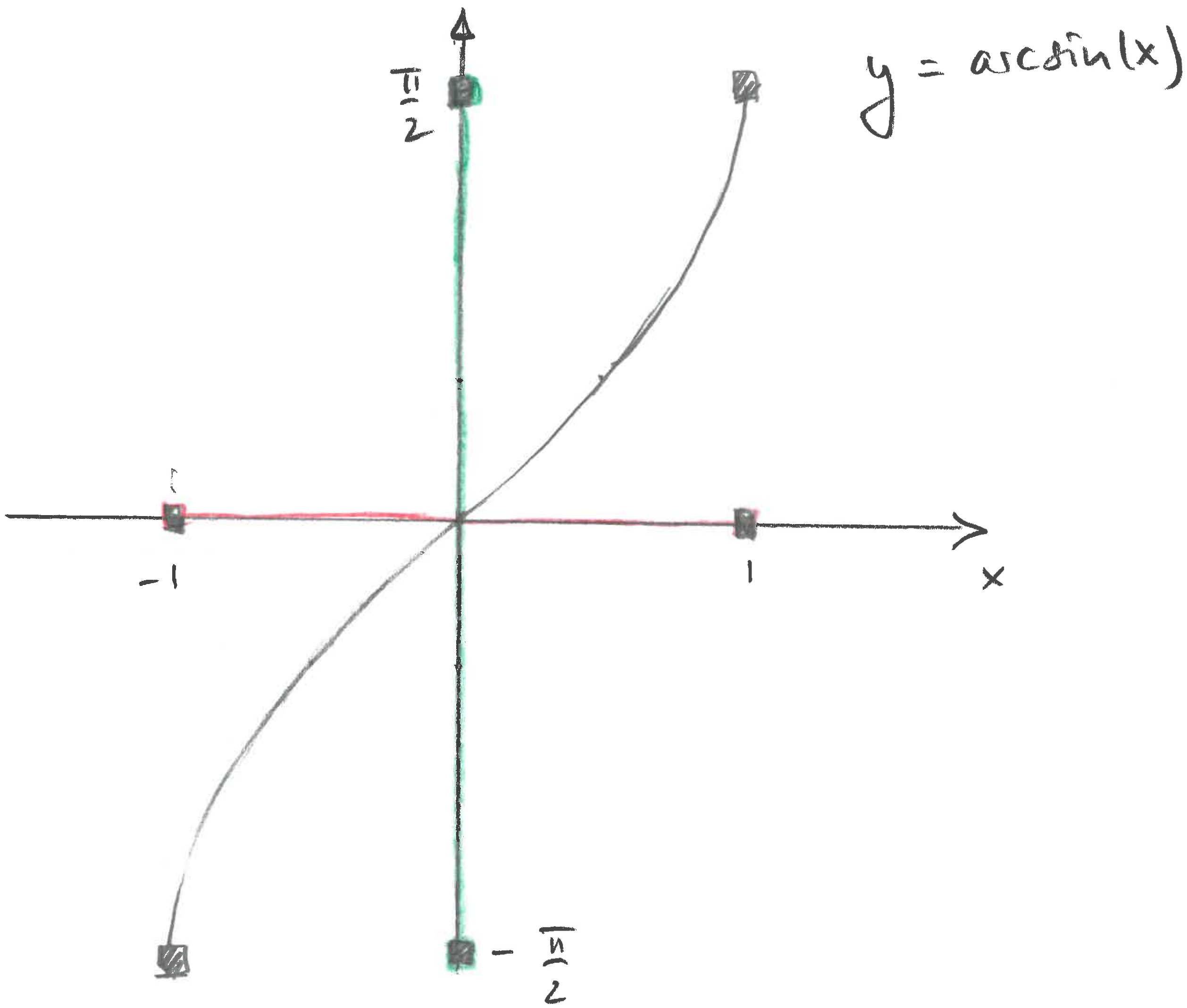
Ihre Umkehrfunktion heiße Arcussinus, geschrieben

$$g : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \longmapsto g(x) =: \arcsin(x)$$

Ihr Graph entsteht durch Spiegelung des Graphen von f

21.05.21 - 2

an der Geraden $y = x$!



Es wird

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Das können wir noch vereinfachen:

$$\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos(t) = +\sqrt{1 - \sin(t)^2},$$

falls $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, denn

dort ist $\cos(t) \geq 0$.

Also:

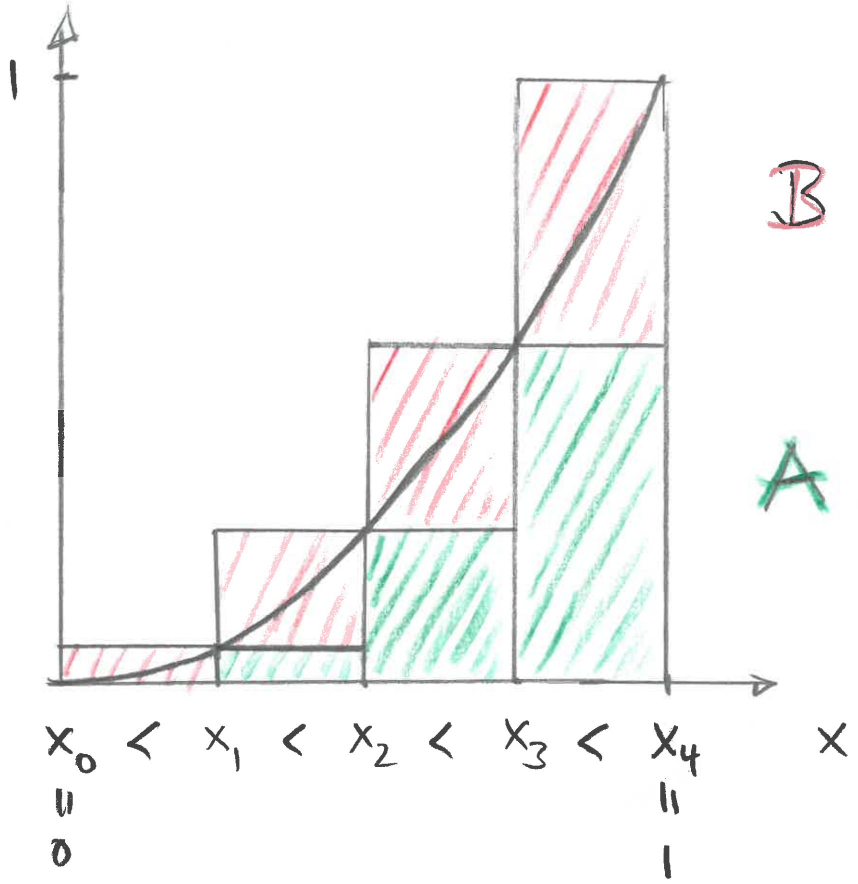
$$g'(x) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}}$$

Umkehrfunktion

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

<u>Bsp</u> Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$



$$\text{Unter}(f, \underline{x}) = A$$

$$\text{Ober}(f, \underline{x}) = A + B$$

Sei für $n \geq 2$ die Unterteilung

$$0 = \frac{0}{n} = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

betrachtet.

Es wird die Untersumme

$$\mathrm{Unter}(f, \underline{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{f(x_{j-1})}_{\text{Minimum auf } [x_{j-1}, x_j]}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{(j-1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \underset{(\text{s.u.})}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

(zu ⊛: $\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \overset{!}{=} \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

Induktion:

IA: $n=1$: $LS = 0 = RS$

IS: $n-1 \rightsquigarrow n$:

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \left(\sum_{j=1}^{n-2} j^2\right) + (n-1)^2$$

$$\overset{IV}{=} \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} + (n-1)^2$$

$$= \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} - n^2 + \cancel{n} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{n^2}{2} - \cancel{n} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{n}{6} - \cancel{\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$)

Es wird die Obersumme

$$\text{Ober}(f, \underline{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \sup \{ f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j] \}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{f(x_j)}_{\text{Maximum auf } [x_{j-1}, x_j]}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{j^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 \overset{(*)}{\underset{(\text{s.o.})}{=}} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Also

$$\mathrm{Unter}(f, \underline{x}) \leq \int_0^1 x^2\,dx \leq \mathrm{Ober}(f, \underline{x})$$

$$\mathrm{Unter}(f, \underline{x}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}, \qquad \mathrm{Ober}(f, \underline{x}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Da dies für jedes n gilt,

und da $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}$

und da $\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}$,

folgt: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$