Bsp Konvergiert $\int_0^1 \ln(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$?

Uneigentliche Stelle: 0

Majorante: Für $x \in]0,1]$ ist

$$\left| \ln(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$$

$$\leq |\ln(x)| + \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$\leq -\ln(x) + 1$$

Und $\int_0^1 -\ln(x) + 1 \, dx$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^1 -\ln(x) + 1 \, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left(- \int_\alpha^1 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} \, dx + \int_\alpha^1 1 \, dx \right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left(-\left(\left[\underset{f}{x} \underset{g}{\ln(x)} \right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}} \, dx \right) + [x]_\alpha^1 \right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left(- [x \ln(x)]_\alpha^1 + 2 [x]_\alpha^1 \right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha \ln(\alpha) + 2(1-\alpha)$$

$$= 2 + \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^{-1}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} 2 + \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^{-1}}{-\alpha^{-2}}$$

$$= 2 + \lim_{\alpha \to 0} (-\alpha)$$

$$= 2$$

Somit ist auf $]0,1]$

$$-\ln(x) + 1$$

eine konvergente Majorante von

$$\ln(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Also konvergiert

$$\int_0^1 \ln(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

(Der Wert beträgt näherungsweise

$-1{,}50407$, aber das können

wir <u>nicht</u> exakt ausrechnen)

Bsp Konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(k)^2}$?

Sei $f(x) := \frac{1}{x \ln(x)^2}$.

Für $2 \leq x_1 \leq x_2$

ist $f(x_1) \geq f(x_2) \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} f(x_1) & \geq & f(x_2) \\ \| & & \| \\ \frac{1}{x_1 \ln(x_1)^2} & & \frac{1}{x_2 \ln(x_2)^2} \end{array}$$

Also:

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$ konvergent

$$\Updownarrow$$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} \, dx$ konvergent.

Für das Integral wird:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \int_2^{\beta} \frac{1}{x \ln(x)^2}\,dx$$

$u = \ln(x)$
$u' = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(\beta)} \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln(2)}^{\ln(\beta)}$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{\ln(\beta)} + \frac{1}{\ln(2)}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)}$$

Somit konvergiert $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2}\,dx$,

und also konvergiert auch $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$.

Vorsicht!

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)^2}\, dx = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1{,}4427$$

$$\neq$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \geq 2$$