Bsp

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir wollen A auf Definitheit untersuchen.

(1) Mittels Hauptminorenkriterium:

$$\Pi_1(A) = \det(2) = 2 > 0$$

$$\Pi_2(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

Also ist A positiv definit.

(2) Mittels Eigenwerten: Es ist

$$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 2-X & -1 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$= X^2 - 4X + 3$$

$$= (X-1)(X-3)$$

Also haben wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1 > 0$$

$$\lambda_2 = 3 > 0$$

Somit ist A positiv definit.

(3) Direkt nach Definition:

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{0\}$

ist

$$(x_1 \ \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \ \ x_2) \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 2x_2^2$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= \ldots$$

$$\dots = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0}$$

Falls $x_1^2 = 0$, dann ist $x_2 \neq 0$, also $x_2^2 > 0$.

Jedenfalls: $x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$

Also ist A positiv definit.

Bsp $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

ist negativ definit – es ist $B = -A$ mit A aus vorigem Bsp., und A war positiv definit.

Mit Hauptminorenkriterium direkt:

$$\Pi_1(B) = \det(-2) = -2 < 0$$

$$\Pi_2(B) = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

abwechselndes Vorzeichen beginnend mit $-$ $\Longrightarrow$ B ist negativ definit

---

Bsp der

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} :$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$$

Flachstellen:

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = -y$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow \quad (3x-2)\,x = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0$, also $y = 0$

oder $x = \frac{2}{3}$, also $y = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Flachstellen

$(0,0)$ und $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Art der Flachstellen bestimmen: ...

...,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Flachstelle $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1(H_f(0,0)) = \det(0) = 0$$

$$\Pi_2(H_f(0,0)) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

Also $H_f(0,0)$ weder positiv noch negativ definit, und $\det H_f(0,0) \neq 0$ ...

$\Rightarrow H_f(0,0)$ indefinit

$\Rightarrow (0,0)$ Sattelstelle

Flachstelle $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$:

$$H_f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1\left(H_f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = \det(4)$$

$$= 4 > 0$$

$$\Pi_2\left(H_f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 > 0$$

$$\Rightarrow \quad H_f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$ positiv definit

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$ lokale

Minimalstelle