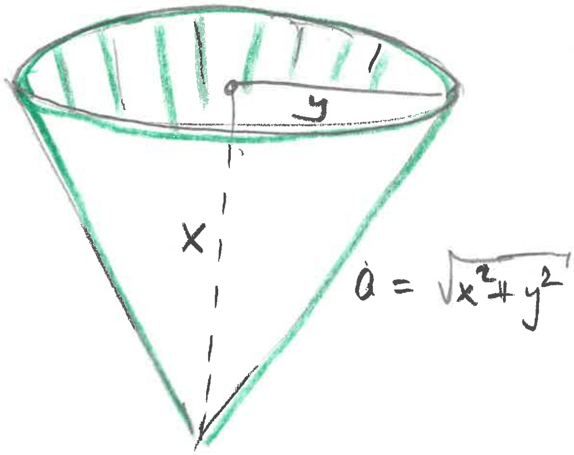
Bsp

Wir betrachten einen kegelförmigen Trichter:



Dieser soll 1 m^3 Wasser fassen können. Dafür soll seine Oberfläche aber minimal gemacht werden.

Also: $\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi y^2 \cdot x$

Also soll, mit ...

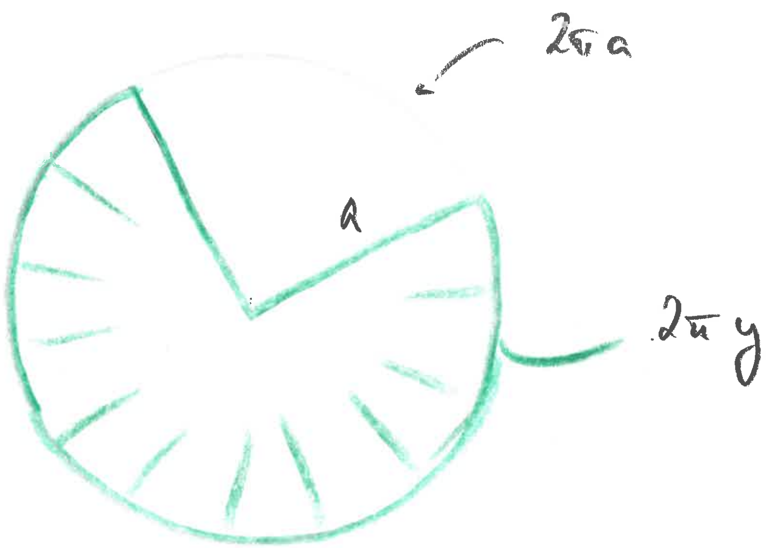
$$g(x,y) = \frac{1}{3}\pi x y^2 - 1$$

die Bedingung

$$g(x,y) = 0$$

erfüllt sein.

Oberfläche: Abwickeln:



$$\Rightarrow \text{Oberfläche} = \pi a^2 \cdot \frac{2\pi y}{2\pi a}$$

$$= \pi a y = \pi \sqrt{x^2+y^2} \cdot y$$

Also haben wir

mit $f(x,y) := \pi \sqrt{x^2+y^2} \cdot y$

eine lokale Minimalstelle

von f unter Nebenbedingung

$g = 0$ zu finden.

Dabei sei $(x,y) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$.

Es wird

$$\nabla_f(x,y) = \pi \begin{pmatrix} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{3}\pi \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das Lagrange-Gleichungssystem:

(1) $\pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xy = \lambda_1 \cdot \frac{1}{3}\pi y^2$

(2) $\pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2y^2+x^2) = \lambda_1 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 2xy$

(3) $\frac{1}{3}\pi x y^2 - 1 = 0$

Aus $2x \cdot (1) - y \cdot (2)$

erhalten wir nach Multiplikation

mit $\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{\pi}$:

$$2x^2 y = 2y^3 + x^2 y$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} x = y$$

Aus (3) dann:

$$1 = \frac{1}{3}\pi \, x \, y^2 = \frac{1}{3}\pi \, x \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{6}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$:

$$\underbrace{(\hat{x}, \hat{y})}_{\text{als Abkürzung}} := \left(\left(\frac{6}{4}\right)^{1/3}, \left(\frac{6}{4}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Ist diese Flachstelle eine lokale Extremstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?

Aus (1) :

$$\lambda_1 = \frac{\pi \cdot (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{x}\,\hat{y}}{\frac{1}{3}\,\pi\,\hat{y}^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\hat{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{x}}{\frac{1}{3}\,\hat{y}}$$

$$= \ldots$$

18.06.21 – 7

$$\dots = \frac{3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

Ferner:

$$\frac{d}{dx}\left(\pi\,(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xy\right)$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \cdot x \cdot y$$

$$+ \pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y$$

$$= \pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-x^2 y + (x^2+y^2)y\right)$$

$$= \pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y^3$$

Symmetrisch dazu:

$$\frac{d}{dy}\left(\pi\,(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xy\right)$$

$$= \pi \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x^3$$

Und:

$$\frac{d}{dy}\left(\pi\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2y^2+x^2)\right)$$

$$= \pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y\cdot(2y^2+x^2)$$

$$+\pi\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4y$$

$$= \pi\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-y\cdot(2y^2+x^2) + 4y(x^2+y^2)\right)$$

$$= \pi\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2y^3+3x^2y)$$

Also

$$H_f(x,y) = \pi(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} y^3 & x^3 \\ x^3 & 2y^3+3x^2y\end{pmatrix}$$

Ferner:

$$H_g(x,y) = \frac{2}{3}\pi \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Also

$$H_f(\hat{x},\hat{y}) - \lambda_1 H_g(\hat{x},\hat{y})$$

$$= \pi \left(\hat{x}^2+\hat{y}^2\right)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \hat{y}^3 & \hat{x}^3 \\ \hat{x}^3 & 2\hat{y}^3+3\hat{x}^2\hat{y} \end{pmatrix}$$

$$- \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \cdot 3^{1/2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & \hat{y} \\ \hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsetzen} \\ \text{von } \hat{x},\hat{y}}}{=} \pi \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2^{\frac{3}{2}} \\ 2^{\frac{3}{2}} & 8 \end{pmatrix} - \pi \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \pi \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} =: H$$

$$\nabla g(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{3}\pi \begin{pmatrix} \hat{y}^2 \\ 2\hat{x}\hat{y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hat{x}^2 \\ \sqrt{2}\,\hat{x}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\pi \hat{x}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad u := \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ verwendbar

$$u^t H u = \pi \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot (2\sqrt{2} \;\; -1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -12 \end{pmatrix}}$$

$$= (\underbrace{\pi \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 36}_{> 0})$$

Dies ist eine positiv definite 1×1 – Matrix.

Also liegt bei

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3}, \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

eine lokale Minimalstelle

unter Nebenbedingung

$g = 0$ vor.

Es ist

Höhe des Kegels

Radius seines Grundkreises

$$(\hat{x}, \hat{y}) \approx \left(\underset{\downarrow}{1{,}2407}, \underset{\downarrow}{0{,}8773} \right)$$