Bsp $y(x) = \tan(x)$

ist eine Lösung der

Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2 .$$

Denn für

$$y(x) = \tan(x)$$

ist in der Tab

$$y'(x) = 1 + \tan(x)^2$$

$$= 1 + y(x)^2 .$$

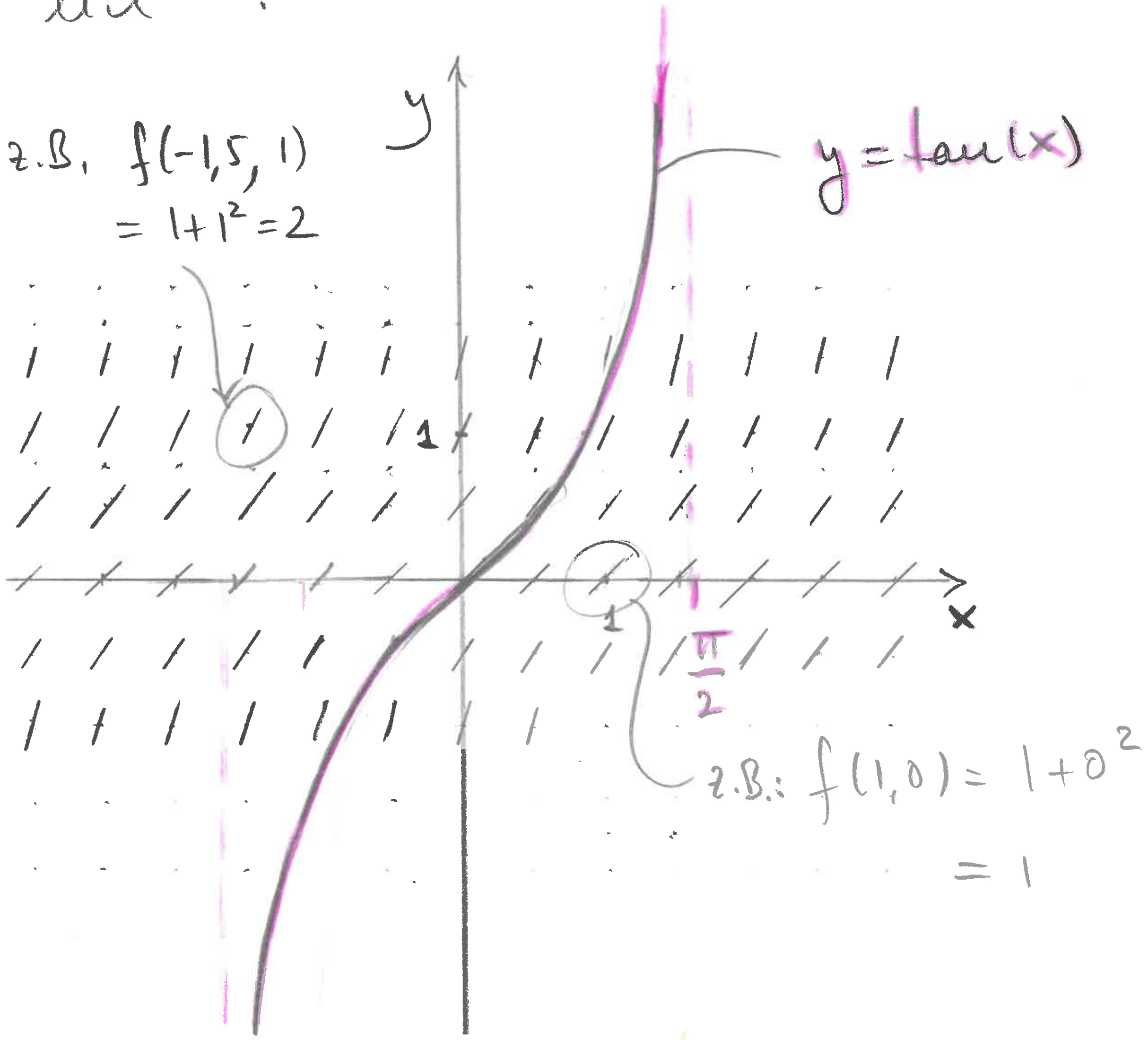
Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

Bsp Richtungsfeld für

$$y' = 1 + y^2 :$$

man trage an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ das Linienelement mit Steigung $f(x,y) = 1 + y^2$ ein!



Bsp Lösungsverfahren für separierbare Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2$$

(1.) $$y' = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}}$$

(Also: $f'(x) = 1$, $g'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$f(x) = x + c$, $g(y) = \arctan(y)$

Das wird uns sowieso in den weiteren Schritten begegnen.)

2. $$\frac{1}{1+y^2}\, y' = 1$$

3. $$\int \frac{1}{1+y^2} \underbrace{y'\,dx}_{dy} = \int 1\,dx$$

4. $$\arctan(y) = x + \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}}$$

5. $$\boxed{y = \tan(x+c)}$$

Definitionsbereich
$D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi - c : k \in \mathbb{Z} \}$
abhängig von c!

6. Probe:

$$y' = 1 + \tan(x+c)^2$$
$$= 1 + y^2 . \quad \text{Paßt}$$

Bsp

Differentialgleichung

$$y' = e^{-y}$$

Anfangsbedingung

$$y(0) = 0$$

Also:

$$e^{y} y' = 1$$

$$\int e^{y} \underbrace{y' dx}_{dy} = \int 1 \, dx$$

$$e^{y} = x + c$$

$$y = \ln(x+c)$$

$$0 \overset{!}{=} y(0) = \ln(0+c)$$

$$\Longrightarrow c = 1$$

Lösung: $y(x) = \ln(x+1)$

Probe: $y'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$$e^{-y(x)} = e^{-\ln(x+1)}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln(x+1)}}$$

$$= \frac{1}{x+1}$$

Paßt.