Bsp

Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}$$

zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Es handelt sich um eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.

Wir substituieren

$$y(x) = u(x) \cdot x,$$

also

$$y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x),$$

dh.

$$y' = u' \cdot x + u$$

Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc} y' & = & \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x} \\ \| & & \| \\ u' \cdot x + u & & \dfrac{1}{u^2} + u \end{array}$$

Also

$$u' = \frac{1}{x u^2}$$

Separierbar!

$$\int u^2 \underbrace{u' \, dx}_{du} = \int \frac{1}{x} \, dx$$

Also

$$\left[\frac{1}{3} u^3 \right] = \left[\ln(|x|) \right]$$

D.h. $\frac{1}{3} u^3 = \ln(|x|) + c$ ...

... für ein $c \in \mathbb{R}$.

Also $u = \sqrt[3]{3\ln(|x|) + 3c}$

Also $y = u \cdot x = x \sqrt[3]{3\ln(|x|) + 3c}$

Anfangsbedingung!

$$1 \stackrel{!}{=} y(1) = 1 \cdot \sqrt[3]{3\ln(|1|) + 3c}$$

$$= \sqrt[3]{3c}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 3c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

Lösung:

$$\boxed{y(x) = x \cdot \sqrt[3]{3\ln(|x|) + 1}}$$

Probe:

$$y' = 1 \cdot \left(3 \cdot \ln(|x|) + 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$+ x \cdot \frac{1}{3}\left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{x}$$

$$= \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$+ \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2 \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$+ \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(3 \ln(|x|) + 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

Das ist dasselbe. Die Differentialgleichung ist erfüllt.

Wir überprüfen die Anfangsbedingung:

$$y(1) = 1 \cdot \sqrt[3]{\underbrace{3\ln(|1|)}_{0} + 1}$$

$$= 1$$

Ra/t