Bsp

(*) $y' = y \ln(x) + x^x$

Zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$y' = y \ln(x)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \ln(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = [\ln(|y|)], \qquad \int \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]$$

$$\Longrightarrow \quad |y| = e^{x\ln(x)-x} \cdot e^{c}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{x\ln(x) - x} \cdot d$$

für ein $\underbrace{d \in \mathbb{R}}$

Hinzunahme von $y(x) = 0$
durch Erlauben von $d = 0$

Ersetzen von d durch $d(x)$:
Ansatz:

$$y = e^{x\ln(x) - x} \cdot d(x)$$

$$y' = e^{x\ln(x) - x} \cdot \ln(x) \cdot d(x) + e^{x\ln(x) - x} \cdot d'(x)$$

Damit in $(*)$:

$$y' \overset{!}{=} y \ln(x) + x^x$$

wird zu ...

$$\ldots \left(e^{x\ln(x)-x}\cdot\ln(x)\cdot d(x)\right.$$

$$\left.+\; e^{x\ln(x)-x}\cdot d'(x)\right)$$

$$\overset{!}{=} \left(e^{x\ln(x)-x}\cdot d(x)\right)\ln(x) + x^x$$

Also:

$$e^{x\ln(x)-x}\cdot d'(x)$$

$$\overset{!}{=} \quad x^x = e^{x\ln(x)}$$

Also:

$$d'(x) = e^x$$

Also

$$\left[d(x)\right] = \int e^x\, dx = \left[e^x\right]$$

Also

$$d(x) = e^x + h$$

für ein $h \in \mathbb{R}$.

Also

$$y(x) = e^{x\ln(x) - x}\,(e^x + h)$$

$$= e^{x\ln(x)} + h \cdot e^{x\ln(x) - x}$$

$$= x^x + h \cdot x^x e^{-x}$$

Probe:

$$y'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + \underbrace{x \cdot \tfrac{1}{x}}_{1})$$

$$+ h \cdot e^{x\ln(x) - x} \cdot \ln(x)$$

$$y(x)\ln(x) + x^x = \ldots$$

$$\ldots \; e^{x\ln(x)} \ln(x)$$

$$+ \; h\, e^{x\ln(x) - x} \ln(x) \; + e^{x\ln(x)}$$

Paßt.

<u>Bsp</u> Sei zu lösen:

$$y' = \arctan(y) + x$$

Sei $D = \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ist $$f(x,y) = \arctan(y) + x$$

$$|f_y(x,y)| = \frac{1}{1+y^2} \leq 1 =: L$$

Sei $y(x)$ die Lösung mit $y(0) = 0$.

Sei $\tilde{y}(x)$ die Lösung mit $\tilde{y}(0) = 1$

Dann:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)|$$

$$\leq |y(0) - \tilde{y}(0)| \cdot e^{L|x-0|}$$

$$= e^{|x|}$$

(Es ist keine explizite Lösung bekannt. Sowohl $y(x)$ als auch $\tilde{y}(x)$ müssen numerisch angenähert werden.)