Bsp. Wir wollen das Differentialgleichungssystem

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix}}_{A(x)} y$$

lösen. In Einzelgleichungen geschrieben:

$$\begin{cases} y_1' = -x\,y_1 + x^2 y_2 \\ y_2' = x^2 y_1 - x\,y_2 \end{cases}$$

Idee: • $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - x \\ x^2 - x \end{pmatrix} = \underbrace{(x^2 - x)}_{\lambda_1(x)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -x - x^2 \\ x + x^2 \end{pmatrix} = \underbrace{-(x^2 + x)}_{\lambda_2(x)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir können mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

also $A(x)$ diagonalisieren:

$$S^{-1} \cdot A(x) \cdot S$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x & 0 \\ 0 & -x^2 - x \end{pmatrix}$$

Dementsprechend substituieren

wir:

$$y = Su,$$

d.h. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix},$

wobei $u = u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$.

Es wird

$$S^{-1} y = u \, .$$

Es wird

$$y' = S \cdot u' \, ,$$

da S eine konstante Matrix ist.

Also:

$$y' = A(x) \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \quad S \cdot u' = A(x) \cdot S \cdot u$$

$$\Leftrightarrow \quad u' = S^{-1} \cdot A(x) \cdot S \cdot u$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - x & 0 \\ 0 & -x^2 - x \end{pmatrix} \cdot u$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = (x^2 - x)\, u_1 \\ u_2' = (-x^2 - x)\, u_2 \end{cases}$$

Wir haben das System "entkoppelt".

- $u_1' = (x^2 - x)\, u_1$

$$\Rightarrow \int \frac{u_1'}{u_1}\, dx = \int x^2 - x \, dx$$

$$\left[\ln(|u_1|)\right] \qquad \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow u_1 = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_1$$

$$\cdot \quad u_2' = \left(-x^2 - x\right) u_2$$

$$\Rightarrow \int \frac{u_2'}{u_2}\, dx = \int -x^2 - x \; dx$$

$$\left[\ln(|u_2|)\right] = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow u_2 = e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_2$$

$$\Rightarrow y_1 \overset{\text{J.O.}}{=} u_1 + u_2 = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_1 + e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_2$$

$$y_2 \overset{\text{J.O}}{=} u_1 - u_2 = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_1 - e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot d_2$$

Oder:

$$\boxed{y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = d_1 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Probe:

$$y' = d_1 \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ d_2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot (-x^2 - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A(x) \cdot y = \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \cdot d_1 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \cdot d_2 e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= d_1 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - x \\ x^2 - x \end{pmatrix}$$

$$+ d_2 e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -x^2 - x \\ x^2 + x \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe