Bsp Wir greifen das Beispiel

von 02.07.21 – 1 wieder auf.

Dort war

$$A(x) = \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix}$$

Und für das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} y$$

haben wir den folgenden

Lösungsraum gefunden:

$$L_{A,0} = \left\{ d_1 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Wronski-Determinante

des Tupels

$$\Bigg(\underbrace{e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y_{[1]}(x)} , \underbrace{e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{y_{[2]}(x)} \Bigg)$$

ist

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} & e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \\ e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} & -e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= -2e^{-x^2}$$

Es ist $w(0) = -2 \neq 0$.

Also ist dieses Tupel

ein Fundamentalsystem.

Man erkennt auch:

$$w(x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ferner haben wir für $\hat{x} = 0$ die bijektive Abbildung

$$L_{A,0} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$$y \longmapsto y(0)$$

$$d_1 \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto d_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bsp Wir setzen dieses Beispiel nochmals fort und wollen das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$(*) \quad y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix}}_{A(x)} y + \underbrace{\begin{pmatrix} x-x^2 \\ x-x^2 \end{pmatrix}}_{g(x)}$$

lösen. Wir brauchen noch eine Partikulärlösung, Variation der Konstanten:

$$y = d_1(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2(x) \cdot e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt auf:

$$y' = d_1'(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2'(x)\, e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$+\, d_1(x) \cdot \left(e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)' + d_2(x) \left(e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)'$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \cdot d_1(x)\, e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \cdot d_2(x)\, e^{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x - x^2 \\ x - x^2 \end{pmatrix}$$

Also können wir $d_2'(x) = 0$ setzen und müssen dann haben:

$$d_1'(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}} = x - x^2$$

Also:

$$d_1'(x) = (x - x^2)\, e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$$

Also

$$[d_1(x)] = \int (x - x^2)\, e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}\, dx$$

$$\underset{u' = x - x^2}{\overset{u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{=}} \int e^u \, du$$

$$= [e^u]$$

$$= \left[e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}\right]$$

Wir können nehmen:

$$d_1(x) = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}.$$

Das gibt die Partikulärlösung ...

$$\ldots \quad y_{[0]}(x) = d_1(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: Lösungsmenge zu ⊛:

$$L_{A,g} = y_{[0]} + L_{A,0}$$

$$= \left\{ y_{[0]} + d_1 y_{[1]} + d_2 y_{[2]} : d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_1 \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe für partikuläre Lösung:

$$y_{[0]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \ldots$$

$$y'_{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(x)\, y_{[0]} + g(x)$$

$$= \begin{pmatrix} -x & x^2 \\ x^2 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - x^2 \\ x - x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe.

Bsp Es war im obigen Beispiel

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\det\left(\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -e^2$$

Es ist

$$\exp\left(\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix}\right)$$

$$= \exp(2 + \pi i)$$

$$= e^2 \cdot e^{\pi i}$$

$$= -e^2$$

Das ist dasselbe.