Bsp

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Wir wollen $\exp(Ax)$ bestimmen.

Zuerst die Jordanform von A:

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= (1-X)^3 = -(X-1)^3$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3.

$$A_{(1)} = A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underbrace{0} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \underbrace{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{(1)}\, y_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ersetzt } x_{2,1}$$

$$A^2_{(1)}\, y_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ersetzt } x_{1,1}$$
(ist gleich zu)

$\Rightarrow$ Hauptvektorkette

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gibt}$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J$$

Damit wird $A = S \mathcal{J} S^{-1}$ und also

$$\exp(Ax) = \exp(S \cdot \mathcal{J}x \cdot S^{-1})$$

$$= S \cdot \exp(\mathcal{J}x) \cdot S^{-1}$$

$$\overset{\text{Skript}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{1 \cdot x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1+x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 1 & x & x + \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\det\left(\exp(Ax)\right) = \det\left(e^x\begin{pmatrix}1 & x & x+\frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= (e^x)^3 \det\begin{pmatrix}1 & x & x+\frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= (e^x)^3 \cdot 1 = e^{3x}$$

$$=$$

$$\exp\left(\operatorname{tr}(Ax)\right) = \exp\left(\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x\right)\right)$$

$$= \exp(3x) = e^{3x}$$

Paßt.