Bsp Wir wollen alle

Lösungen zu

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix}}_{g(x)}$$

bestimmen.

Von 14.07.21 – 7:

$$\exp(Ax) = \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3} e^{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

NR: $\cos(t) + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos(t) + \cos(t) \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{-1/2} - \cancel{\sin(t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$+ \cos(t) \underbrace{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}_{-1/2} - \cancel{\sin(t) \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

Lösungen zu $y' = Ay$:

$y = \exp(Ax) \cdot c$ für $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Variation der Konstanten! Ansatz:

$y_{[0]} = \exp(Ax) \cdot c(x)$

Dann:

$$y'_{[0]} = A \exp(Ax) \cdot c(x) + \exp(Ax) \cdot c'(x)$$
$$\overset{!}{\parallel}$$
$$A y_{[0]} + g(x) = A \exp(Ax)\, c(x) + g(x)$$

Gleichsetzen gibt:

$$\exp(Ax) \cdot c'(x) \overset{!}{=} g(x)$$

$$c'(x) \overset{!}{=} \exp(-Ax) \cdot g(x) = \ldots$$

$$\ldots = \Bigg(\frac{2}{3} e^{-\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{-x\sqrt{3}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{(-x)}{2}} \cos\left(\frac{(-x)\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{(-x)}{2}} \cos\left(\frac{(-x)\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3} e^{-x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg) \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{NR}{=} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\frac{3x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c(x) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{3x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_{[0]}(x) = \exp(Ax) \cdot c(x)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \Bigg(\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3} e^{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) e^{-\frac{3x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{NR}{=} -\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann:

$$y(x) = \underbrace{-\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y_{[0]}(x)} + \underbrace{\exp(Ax)}_{\text{s. 16.07.21 – 1}} \cdot \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}^{3\times 1}}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = -\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3} e^{x} (c_1 + c_2 + c_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier sind $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählbare Konstanten.

Probe für $y_{[0]}(x)$:

Zum einen:

$$y_{[0]}'(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zum anderen:

$$A\, y_{[0]}(x) + g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe.

Bsp Wir suchen alle Lösungen von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} y$$

Dazu berechnen wir ein Fundamental-system von $y' = Ay$.

Dazu berechnen wir eine Jordanform zu $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$= X^2 - 4X + 3$$

$$= (X-1)(X-3)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3,$

A ist diagonalisierbar

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\quad \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

von $E_A(1)$

$\underline{\lambda_2 = 3}$ $\quad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

von $E_A(3)$

$\Rightarrow$ Mit $S := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J$$

$$\Rightarrow \exp(Jx) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

Nun zum Fundamentalsystem.

Weg 1

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(Ax) = S \exp(Jx) S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^x & e^x \\ e^{3x} & e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x + e^{3x} & -e^x + e^{3x} \\ -e^x + e^{3x} & e^x + e^{3x} \end{pmatrix}$$

Das gibt das Fundamentalsystem

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^x + e^{3x} \\ -e^x + e^{3x} \end{pmatrix}}_{y_{[1]}} , \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^x + e^{3x} \\ e^x + e^{3x} \end{pmatrix}}_{y_{[2]}} \right)$$

Weg 2:

$$S \cdot \exp(J \cdot x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^x & e^{3x} \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}$$

Das gibt das Fundamentalsystem

$$\left(\underbrace{e^x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{y}_{[1]}} , \underbrace{e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{y}_{[2]}} \right)$$

Vergleich

$$y_{[1]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{x} + e^{3x} \\ -e^{x} + e^{3x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\tilde{y}_{[1]} + \frac{1}{2}\tilde{y}_{[2]}$$

$$y_{[2]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{x} + e^{3x} \\ e^{x} + e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\tilde{y}_{[1]} + \frac{1}{2}\tilde{y}_{[2]}$$

(Basiswechsel)