<u>Bsp.</u> Wir wollen

die Differentialgleichung

$$y' = y + x y^3$$

zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$

lösen. Bernoulli !

- Substitution: $u = y^{1-3} = y^{-2}$

$$u' = -2 y^{-3} y'$$

$$\Rightarrow \quad u' = -2 y^{-3} y'$$

$$\overset{!}{=} -2 y^{-3} \cdot y - 2 y^{-3} \cdot x y^3$$

$$= -2u - 2x$$

- Zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$u' = -2u$$

$$\Rightarrow \int \frac{u'}{u}\,dx = \int -2\,dx$$

$$\Rightarrow u = d\,e^{-2x}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$

- Variation der Konstanten

$$u(x) = d(x)\,e^{-2x}$$

$$\Rightarrow d'(x)\,e^{-2x} = -2x$$

$$\Rightarrow d'(x) = -2x\,e^{2x}$$

$$\Rightarrow d(x) = -x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + s$$

für ein $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad u(x) = d(x)\, e^{-2x}$$

$$= \left(-x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + s\right) e^{-2x}$$

$$= -x + \frac{1}{2} + s e^{-2x}$$

für ein $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad y = \pm u^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\left(-x + \frac{1}{2} + s e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

• $1 \overset{!}{=} y(0) = + \left(\frac{1}{2} + s\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \left(-x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

ist Lösung von $y' = y + xy^3$

mit $y(0) = 1$

- Probe:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\cdot\left(-1-e^{-2x}\right)$$

$$y(x)+xy(x)^3$$

$$= \left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ x\cdot\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\cdot\left(\cancel{-x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}+\cancel{x}\right)$$

Das ist dasselbe.

<u>Bsp</u> $y' = y^2 + y - e^{2x}$

hat Partikulärlösung

$\eta(x) = e^x$,

da $\cancel{\eta(x)^2} + \eta(x) - \cancel{e^{2x}}$
$= e^x = \eta'(x)$.

Gesucht: Lösung

mit $y(0) = 0$. Riccati!

- Es ist

$y' \overset{!}{=} a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x)$

mit $a(x) = 1$, $b(x) = 1$, $c(x) = -e^{-2x}$

Ansatz:

$$y = \eta(x) + \frac{1}{v}$$

Das führt auf

$$v' \overset{!}{=} -\left(2a(x)\,\eta(x) + b(x)\right) v$$
$$- a(x)$$

$$= -\left(2e^x + 1\right) v - 1$$

- Zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$v' = -\left(2e^x + 1\right) v$$

$$\Rightarrow \int \frac{v'}{v}\, dx = \int -(2e^x + 1)\, dx$$

$$\Rightarrow [\ln(|v|)] = [-2e^x - x]$$

$$\Rightarrow v = d\, e^{-2e^x - x}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$

- Variation der Konstanten:

$$v = d(x)\, e^{-2e^x - x}$$

$$\Rightarrow d'(x)\, e^{-2e^x - x} = -1$$

$$\Rightarrow d'(x) = -e^{2e^x + x}$$

$$\Rightarrow [d(x)] = \int -e^{2e^x + x}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \int -e^{2e^x} \cdot e^x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u \, du$$

$u = 2e^x$

$u' = 2e^x$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^u\right] = \left[-\frac{1}{2} e^{2e^x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad d(x) = -\frac{1}{2} e^{2e^x} + s \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = d(x) \, e^{-2e^x - x}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} + s \, e^{-2e^x - x}$$

für ein $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \eta(x) + \frac{1}{v(x)}$$

$$= e^x + \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-x} + s\,e^{-2e^x - x}}$$

- $$0 = y(0)$$

$$= 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + s\,e^{-2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + s\,e^{-2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad s = -\frac{1}{2}e^2$$

$\Rightarrow$ $y(x) = e^x - \dfrac{2}{e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}}$

ist Lösung von $y' = y^2 + y - e^{2x}$

mit $y(0) = 0$

Probe:

$$y' - y^2 - y + e^{2x}$$

$$= \cancel{e^x} + \frac{2}{\left(e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}\right)^2} \cdot \left(-e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}(-2e^x - 1)\right)$$

$$- \left(e^x - \frac{2}{e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}}\right)^2$$

$$- \left(\cancel{e^x} - \frac{2}{e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}}\right) + e^{2x}$$

$$= \frac{2}{\left(e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}\right)^2} \left(-e^{-x} - 2e^{-2e^x + 2} - e^{-2e^x - x + 2}\right)$$

$$- \cancel{e^{2x}} + \frac{4e^x}{e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}} - \frac{4}{\left(e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}\right)^2}$$

$$+ \frac{2}{e^{-x} + e^{-2e^x - x + 2}} + \cancel{e^{2x}} = \ldots$$

$$''' = \frac{1}{\left(e^{-x} + e^{-2e^x-x+2}\right)^2}$$

$$\cdot\Big(\cancel{-2e^{-x}} - \cancel{4e^{-2e^x+2}} \cancel{-2e^{-2e^x-x+2}}$$

$$+ \; 4e^x\left(\cancel{e^{-x}} + \cancel{e^{-2e^x-x+2}}\right) \cancel{-4}$$

$$+ \; 2\left(\cancel{e^{-x}} + \cancel{e^{-2e^x-x+2}}\right)\Big)$$

$$= 0.$$

Paßt