Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/5	/4	/5	/5	/6	/ 30

Mathematik 2 für Informatiker

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Falls auch Rechenwege verlangt sind, sind auch diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen.
  Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\arctan(k)}{\arctan(k+1)}\right) =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k \cdot \cos(k\pi) + 1}{2k}\right)^k (z-1)^k$.

$\rho =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n - a\sqrt{n}} - \sqrt{2n} =$ $\boxed{}$

(b) Seien $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ Parameter. Berechnen Sie: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(sx)}{\sin(tx^2)} =$ $\boxed{}$

(c) Sei $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(0)) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 5(xyz + y^2)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (x + y + z)^2 - 25$.

(a) Bestimmen Sie:

$$\nabla_f(x, y, z) = \boxed{}, \qquad \mathrm{H}_f(x, y, z) = \boxed{}$$

$$\nabla_g(x, y, z) = \boxed{}, \qquad \mathrm{H}_g(x, y, z) = \boxed{}$$

(b) Es ist $(-2, -1, -2)$ eine Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.
Handelt es sich bei $(-2, -1, -2)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$? Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\int \sin(2x)\cos(x)^2 \, \mathrm{d}x =$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+4x+5}{x(x^2+2x+5)} =$$

(c) Bestimmen Sie: $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+5}{x(x^2+2x+5)} \, \mathrm{d}x =$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2+x}{x} \cdot y$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2+x}{x} \cdot y + \ln(x^2) \cdot \mathrm{e}^x$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \mathrm{e}$. Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Aufgabe 6 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, deren Inverse S^{-1}, und eine Matrix J in Jordanscher Normalform so, dass $J = S^{-1}AS$ ist.

$S =$ $\boxed{}$ $S^{-1} =$ $\boxed{}$ $J =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$y(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen.

$f'(x) =$ $\boxed{}$ $f''(x) =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie das folgende Taylorpolynom.

$\mathrm{T}_1(f, x, 3) =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie das folgende Restglied nach Lagrange. Hierbei sei $\vartheta \in [0, 1]$.

$\mathrm{R}_1(f, x, 3, \vartheta) =$

(d) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_1(f, x, 3)| \leqslant C \cdot |x - 3|^2$ für $x \in [\frac{1}{4}, 4]$.
Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.