Künzer, Nitsche, Ritter **Abgabe bis Montag 02.08.2021**

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/5	/4	/5	/5	/6	/ 30

Mathematik 2 für Informatiker

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Falls auch Rechenwege verlangt sind, sind auch diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen.
  Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\arctan(k)}{\arctan(k+1)}\right) = \boxed{-\ln(2)}$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\cdot\cos(k\pi)+1}{2k}\right)^k (z-1)^k$.

$$\rho = \boxed{2}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n - a\sqrt{n}} - \sqrt{2n} = \boxed{-\frac{a\sqrt{2}}{4}}$

(b) Seien $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ Parameter. Berechnen Sie: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(sx)}{\sin(tx^2)} = \boxed{\frac{s^2}{2t}}$

(c) Sei $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(0)) =$ $\mathrm{U}_{1+\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}}(+\infty)$

$=]1+\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, +\infty[$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 5(xyz + y^2)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (x + y + z)^2 - 25$.

(a) Bestimmen Sie:

$$\nabla_f(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 5yz \\ 5xz+10y \\ 5xy \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{H}_f(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 5z & 5y \\ 5z & 10 & 5x \\ 5y & 5x & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\nabla_g(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{H}_g(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Es ist $(-2, -1, -2)$ eine Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.
Handelt es sich bei $(-2, -1, -2)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$? Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Für die Flachstelle $(-2, -1, -2)$ erhalten wir $\lambda_1 = -1$ aus der Gleichung

$$\nabla_f(-2, -1, -2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \nabla_g(-2, -1, -2).$$

Weiter ist $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;:\; \begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 \end{pmatrix} u = 0 \,\}$.
Wir setzen daher $U = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir setzen außerdem

$$H := \mathrm{H}_f(-2, -1, -2) - (-1)\mathrm{H}_g(-2, -1, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 \\ -8 & 12 & -8 \\ -3 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

und erhalten $U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Die Hauptminoren dieser Matrix sind

$$\mathrm{M}_1(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) = 30$$
$$\mathrm{M}_2(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) = 275$$

Also ist die Matrix positiv definit. Somit ist $(-2, -1, -2)$ eine lokale Minimalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\int \sin(2x)\cos(x)^2 \,\mathrm{d}x =$ $\boxed{[-\tfrac{1}{16}\cos(4x) - \tfrac{1}{4}\cos(2x)] = [-\tfrac{1}{2}\cos(x)^4]}$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+4x+5}{x(x^2+2x+5)} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{i}/2}{x+1+2\mathrm{i}} + \frac{-\mathrm{i}/2}{x+1-2\mathrm{i}}}$$

(c) Bestimmen Sie: $\int \frac{x^2+4x+5}{x(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x =$ $\boxed{\left[\ln(|x|) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]}$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2+x}{x} \cdot y$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Die Gleichung ist linear und daher separierbar. Aus $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2+x}{x}$ folgt

$$[\ln(|y|)] = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} + 1\,\mathrm{d}x = [2\ln(x) + x]$$

unter Beachtung von $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit ist $\ln(|y|) = \ln(x^2) + x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, also

$$y = x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{e}^c \quad \text{oder} \quad y = -x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{e}^c\,.$$

Es können nun e^c und $-\mathrm{e}^c$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen.
Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ sind also alle Lösungen von der Form

$$y(x) = d \cdot x^2 \mathrm{e}^x$$

für ein $d \in \mathbb{R}$.
Wir machen eine Probe. Es ist $\frac{2+x}{x} \cdot y(x) = d(2x + x^2)\mathrm{e}^x = y'(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2+x}{x} \cdot y + \ln(x^2) \cdot \mathrm{e}^x$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \mathrm{e}$. Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Unter Verwendung der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus (a) machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y(x) = d(x) \cdot x^2 \mathrm{e}^x.$$

Aus $y'(x) = \dfrac{2+x}{x} \cdot y + \ln(x^2) \cdot \mathrm{e}^x$ erhalten wir

$$d'(x) \cdot x^2 \mathrm{e}^x \stackrel{!}{=} \ln(x^2) \cdot \mathrm{e}^x = 2\ln(x) \cdot \mathrm{e}^x.$$

Mit partieller Integration wird

$$d(x) = \int \frac{2\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \cdot 2\ln(x)\right] - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \cdot 2\ln(x) - \frac{2}{x}\right] = \left[-2\frac{\ln(x)+1}{x}\right].$$

Insgesamt sind also alle Lösungen von der Form

$$y(x) = d(x) \cdot x^2 \mathrm{e}^x = -2x(\ln(x)+1)\mathrm{e}^x + s\,x^2\mathrm{e}^x$$

für ein $s \in \mathbb{R}$.
Die Anfangsbedingung ergibt die Gleichung

$$\mathrm{e} \stackrel{!}{=} y(1) = -2\mathrm{e} + s \cdot \mathrm{e}$$

mit Lösung $s = 3$. Also ist

$$y(x) = -2x(\ln(x)+1)\mathrm{e}^x + 3x^2\mathrm{e}^x = (-2\ln(x) - 2 + 3x)x\mathrm{e}^x$$

die Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \mathrm{e}$.
Wir machen eine Probe. Einerseits ist

$$\begin{aligned} \tfrac{2+x}{x} \cdot y(x) + \ln(x^2) \cdot \mathrm{e}^x &= (2+x)(-2\ln(x) - 2 + 3x)\mathrm{e}^x + 2\ln(x) \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (-4\ln(x) - 4 + 6x - 2x\ln(x) - 2x + 3x^2 + 2\ln(x))\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$y'(x) = (-2\ln(x) - 2 - 2 + 6x)\mathrm{e}^x + (-2x\ln(x) - 2x + 3x^2)\mathrm{e}^x.$$

Das ist dasselbe.
Ferner ist $y(1) = (0 - 2 + 3)\mathrm{e} = \mathrm{e}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, deren Inverse S^{-1}, und eine Matrix J in Jordanscher Normalform so, dass $J = S^{-1}AS$ ist.

$$S = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad S^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad J = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

Alternativ:

$$\left(e^{-x}\begin{pmatrix} (x+1)^2 \\ \frac{3}{2}x^2+2x \\ -\frac{1}{2}x(x+2) \end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix} -2x \\ -3x+1 \\ x \end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix} 2x(x-1) \\ 3x^2-5x \\ -x^2+x+1 \end{pmatrix}\right) \quad \left(e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix} 2x+2 \\ 3x+2 \\ -x-1 \end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix} x^2+2x+1 \\ \frac{3}{2}x^2+2x \\ -\frac{1}{2}x^2-x \end{pmatrix}\right)$$

(c) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$y(x) = \boxed{e^{-x}\begin{pmatrix} 2x^2 \\ 3x^2-2x-1 \\ 1-x^2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen.

$$f'(x) = \boxed{\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} \qquad f''(x) = \boxed{-\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}}$$

(b) Bestimmen Sie das folgende Taylorpolynom.

$$\mathrm{T}_1(f, x, 3) = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}(x-3)}$$

(c) Bestimmen Sie das folgende Restglied nach Lagrange. Hierbei sei $\vartheta \in [0,1]$.

$$\mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta) = \boxed{\frac{1}{8}\left(3(3+\vartheta(x-3))^{-\frac{5}{2}} - (3+\vartheta(x-3))^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot(x-3)^2}$$

(d) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_1(f,x,3)| \leqslant C \cdot |x-3|^2$ für $x \in [\frac{1}{4}, 4]$. Geben Sie dazu auch den Rechenweg an.

Für ein $\vartheta \in [0,1]$ ergibt sich dank Satz von Taylor $f(x) = \mathrm{T}_1(f,x,3) + \mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta)$ und also

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathrm{T}_1(f,x,-1)| &= |\mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta)| \\ &= \frac{1}{8}\left|3(3+\vartheta(x-3))^{-\frac{5}{2}} - (3+\vartheta(x-3))^{-\frac{3}{2}}\right| \cdot |x-3|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{8}(3|3+\vartheta(x-3)|^{-\frac{5}{2}} + |3+\vartheta(x-3)|^{-\frac{3}{2}}) \cdot |x-3|^2 \end{aligned}$$

Für $\vartheta \in [0,1]$ und $x \in [\frac{1}{4}, 4]$ ist $3 + \vartheta(x-3) \in [\frac{1}{4}, 4]$. Somit können wir wie folgt fortsetzen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(3|3+\vartheta(x-3)|^{-\frac{5}{2}} + |3+\vartheta(x-3)|^{-\frac{3}{2}}) \cdot |x-3|^2 &\leqslant \frac{1}{8}\left(3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot |x-3|^2 \\ &= 13 \cdot |x-3|^2 \end{aligned}$$

Wir können also $C := 13$ wählen.

Alternativer Lösungsweg. Wir bringen $\mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta)$ auf einen gemeinsamen Nenner.

$$\mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta) = \frac{3-(3+\vartheta(x-3))}{8(3+\vartheta(x-3))^{5/2}}(x-3)^2 = -\frac{\vartheta(x-3)}{8(3+\vartheta(x-3))^{5/2}}(x-3)^2$$

Für ein $\vartheta \in [0,1]$ ergibt sich dank Satz von Taylor $f(x) = \mathrm{T}_1(f,x,3) + \mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta)$ und also

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathrm{T}_1(f,x,-1)| &= |\mathrm{R}_1(f,x,3,\vartheta)| \\ &= \frac{\vartheta|x-3|}{8|3+\vartheta(x-3)|^{5/2}} \cdot |x-3|^2 . \end{aligned}$$

Für $x \in [\frac{1}{4}, 4]$ ist $|x-3| \leqslant \frac{11}{4}$. Für jeden Wert $\vartheta \in [0,1]$ ist $3 + \vartheta(x-3) \in [\frac{1}{4}, 4]$.
Somit können wir wie folgt fortsetzen.

$$\frac{\vartheta|x-3|}{8|3+\vartheta(x-3)|^{5/2}} \cdot |x-3|^2 \leqslant \frac{1 \cdot \frac{11}{4}}{8(1/4)^{5/2}} \cdot |x-3|^2 = 11 \cdot |x-3|^2.$$

Wir können also $C := 11$ wählen.
Jede korrekt begründete Schranke C ist eine richtige Lösung. Sie kann von den vorgestellten Lösungen abweichen.