Aufgabe 6 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[2\ln(x)\cdot\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\,\right]}$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2\cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{x^3-1}}}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\sqrt{x^3-1}}\right]}$

(c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^2\cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{x^3-1}}}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\sqrt{7}}}$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2-s)^k}{3^k}$.

Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe? $\boxed{s \in \,]-1,5[}$

Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $s = 4$: $\boxed{\frac{3}{5}}$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(4-3\mathrm{i})^k(2z+1)^k$: $\boxed{\frac{1}{10}}$

Aufgabe 8 (2 Punkte) Sei $D := \mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$. Sei $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{5}{(x-1)^2}$.

(a) Bestimmen Sie: Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)) = \boxed{\mathrm{U}_{\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}}(1)\cap D}$.

(b) Zeigen Sie $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ unter Verwendung von ε und δ.

> Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir wählen $\delta := \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}_{>0}$.
> Dann gilt nach (a): $\mathrm{U}_\delta(1)\cap D \subseteq f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty))$.
> Also ist $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Künzer, Nitsche, Ritter

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe
Punkte	/2	/3	/3	/5	/9	/3	/3	/2	/ 30

Mathematik 2 für msv

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4} = \boxed{-\frac{4}{3}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^3-7)}{x-2} = \boxed{12}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\cos(2x)^3 = a\cdot\cos(2x)+b\cdot\cos(6x)$ für $x \in \mathbb{R}$: $a = \boxed{\frac{3}{4}}$ $b = \boxed{\frac{1}{4}}$

(b) Berechnen Sie: $\displaystyle\ln\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!\cdot 2^{2k}}\right) = \boxed{\frac{5}{4}}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung.

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)^3} = \boxed{\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3}}$$

(b) Berechnen Sie: $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[2\ln(|x|) - 2\ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)^2}\right]}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen.

$$f'(x) = \boxed{\frac{x+2}{(x+1)^{3/2}}} \qquad f''(x) = \boxed{-\frac{x+4}{2(x+1)^{5/2}}}$$

(b) Bestimmen Sie das folgende Taylorpolynom.

$$\mathrm{T}_1(f,x,1) = \boxed{\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)}$$

(b) Bestimmen Sie das folgende Restglied nach Lagrange. Hierbei sei $\vartheta \in [0,1]$.

$$\mathrm{R}_1(f,x,1,\vartheta) = \boxed{-\frac{5+\vartheta(x-1)}{4(2+\vartheta(x-1))^{5/2}}(x-1)^2}$$

Scheinklausur Mathematik 2 für msv 10.07.2021

Aufgabe 5 (9 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2y + y^2x + (x-2)(z-1)^2$.

(a) Bestimmen Sie:

$$\nabla_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2xy+y^2+(z-1)^2 \\ x^2+2xy \\ 2(x-2)(z-1) \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{H}_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2y & 2(x+y) & 2(z-1) \\ 2(x+y) & 2x & 0 \\ 2(z-1) & 0 & 2(x-2) \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

$$\boxed{\{(0,0,1),\ (2,-1,1+\sqrt{3}),\ (2,-1,1-\sqrt{3})\}}$$

(c) Handelt es sich bei $(2,-1,1+\sqrt{3})$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle von f?

> Es ist eine Sattelstelle.

(d) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xy - (z-1)^2 - 4$. Es ist $(2,2,1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ mit $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla_f(2,2,1) = 6 \cdot \nabla_g(2,2,1) = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix U, in deren Spalten eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (2\ 2\ 0)\, u = 0 \,\}$ steht. Bestimmen Sie die Hessematrix von g.

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{H}_g(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Sei $H := \mathrm{H}_f(2,2,1) - 6 \cdot \mathrm{H}_g(2,2,1)$. Bestimmen Sie:

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}}$$

Handelt es sich bei $(2,2,1)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?

> Es ist eine lokale Minimalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.