

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 12

Platzaufgaben

Platzaufgabe 40 Gegeben ist die folgende von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix.

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t symmetrisch?
- (b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t orthogonal?

Platzaufgabe 41 Gegeben ist die folgende von einem Parameter $t \in \mathbb{C}$ abhängige Matrix.

$$A_t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & t \\ 2+i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

- (a) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist A_t hermitesch?
- (b) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist A_t unitär?

Platzaufgabe 42 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\chi_A(X) = -(X-4)(X-1)^2$. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$S^t A S = D.$$

Platzaufgabe 43 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

- (a) Ist A eine hermitesche Matrix? Ist A eine unitäre Matrix?
- (b) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit

$$\bar{S}^t A S = D.$$

- (c) Gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ derart, dass $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist?

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 12

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 26.04.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 45 Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit

$$S^t A S = D.$$

Hausaufgabe 46 Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2 & -2i & -2 \\ -2 & 2i & 4 & 0 \\ 2i & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$.

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit

$$\bar{S}^t A S = D.$$

Hausaufgabe 47 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ i & -1 & -1 \\ -i & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = -(X + 2)^2(X - 1)$.

(a) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\bar{S}^t A S = D.$$

(b) Bestimmen Sie D^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen D^n und A^n ? Bestimmen Sie damit A^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Hausaufgabe 48 Wir betrachten eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Es sei bekannt, dass A die Eigenwerte -1 , $\frac{1}{2}$ und 2 mit den folgenden Eigenräumen besitzt.

$$E_A\left(\frac{1}{2}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mit

$$S^t A S = D.$$

(b) Bestimmen Sie die Spur $\text{tr}(A)$ und die Determinante $\det(A)$ von A .