Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 14

Platzaufgaben

Platzaufgabe 48 Bestimmen Sie den Folgengrenzwert $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{2} + \pi\, n)$.
Existiert der Funktionengrenzwert $\lim_{x\to+\infty} \cos(\frac{\pi}{2} + \pi\, x)$?

Platzaufgabe 49 Wir betrachten die Folge $(a_k)_{k\geqslant 0} := (\cos(\frac{\pi\, k}{2}))_{k\geqslant 0}$.

(a) Ist die Teilfolge $(a_{2j+1})_{j\geqslant 0}$ konvergent?

(b) Bestimmen Sie weitere konvergente Teilfolgen der Folge $(a_k)_{k\geqslant 0}$.

(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 0}$.

(d) Bestimmen Sie den Limes superior $\limsup_{k\to\infty} a_k$. Existiert $\lim_{k\to\infty} a_k$?

Platzaufgabe 50

(a) Entscheiden Sie jeweils, ob die Reihe konvergiert. Bestimmen Sie in diesem Fall den Wert der Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{k-1}\frac{2^{k+1}}{5^k} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{5^{k-1}}$$

(b) Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{4-3k}{4^k} = \dfrac{ak}{4^k} - \dfrac{a(k-1)}{4^{k-1}}$.

(c) Zeigen Sie $n \leqslant 2^n$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Folgern Sie: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{4^n} = 0$.

(d) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Bestimmen Sie die Teleskopsumme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{4-3k}{4^k}$. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4-3k}{4^k}$.

Platzaufgabe 51 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Welche der Reihen sind absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{7k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{7k^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{((-1)^k+3)^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 14

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 10.05.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 53 Wir betrachten die Folge $(a_k)_{k\geqslant 1} := (2\cos(\frac{2\pi k}{3}) + 1 - k^{-1})_{k\geqslant 1}$.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ unter Verwendung konvergenter Teilfolgen.

(b) Bestimmen Sie $\limsup_{k\to\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Hausaufgabe 54

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(s+1)^{2k+1}$ konvergiert.

Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $s = -\frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie die Teleskopsumme $\sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{(k^2-1)-k}{(k+1)!}$ für $n \geqslant 3$.

Berechnen Sie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{(k^2-1)-k}{(k+1)!}$.

Hausaufgabe 55

(a) Sei $(a_n)_{n\geqslant 0} := (n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2)_{n\geqslant 0}$.

Berechnen Sie a_{10}, a_{100} und a_{1000} in Dezimaldarstellung mit dem Taschenrechner, auf 8 Nachkommastellen genau.

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1+4n^2} - 2n^2$.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{4k^2+1} - 2k)$$

Hausaufgabe 56

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{k})^2}{k^3} \qquad\qquad \sum_{k=2}^{\infty} 3^{1-k}\frac{(4+(-1)^k)^k}{2^k}$$

(b) Für welche $s \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k!}{k^{ks}}$?