Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 16

Platzaufgaben

Platzaufgabe 56 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto x \cdot \sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ und $f^{(3)}(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, \frac{\pi}{2})$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{R}_2(f, x, \frac{\pi}{2}, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

(d) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, \frac{\pi}{2})| \leqslant C \cdot |x - \frac{\pi}{2}|^3$ für $x \in [0, 2\pi]$.

Platzaufgabe 57 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.
Aus Platzaufgabe 55 kennen wir bereits $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$ für $n \geqslant 0$.
Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, -1)$.

Platzaufgabe 58 Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0, die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ und den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k + 3)^k (z - \sqrt{2})^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2\mathrm{i})^k (z + 3\mathrm{i})^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z-1)^k}{(k+1)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k} (z - 1)^k$

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe in (d) konvergiert.

Platzaufgabe 59 Gegeben ist die Funktion $f : \,]0, 2[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k+1}}{2k+1}$.
Bestimmen Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$ mit $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ für $x \in \,]0, 2[$.

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 16

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 31.05.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 61 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, x \mapsto \cos(x) \cdot (x - \mathrm{i})^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, 0)$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 0)| \leqslant C \cdot |x|^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 62 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$.

Es sei bekannt, dass $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n+2)!}{2(1-x)^{n+3}}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 0)$.

(b) Verifizieren Sie unter Verwendung des Restglieds, dass $f(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 0)$ ist. Hierbei darf $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{2^n} = 0$ verwendet werden.

(c) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 2)$. Gilt $f(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{3}, 2)$?

Hausaufgabe 63 Wir betrachten die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \left(\frac{z - 3\mathrm{i}}{5}\right)^k$.

(a) Bestimmen Sie ihren Entwicklungspunkt z_0 und ihren Konvergenzradius ρ.

(b) Skizzieren Sie ihre Konvergenzkreisscheibe.

(c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$.

(1) $z := 3$, (2) $z := 5 + 3\mathrm{i}$, (3) $z := -5 + 3\mathrm{i}$, (4) $z := 1 - 2\mathrm{i}$

Hausaufgabe 64 Sei $D := \,]-1, 1[\,$. Sei $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$.

(a) Bestimmen Sie Polynome $r(x)$ und $s(x)$ mit $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ für $x \in D$.

(b) Schreiben Sie $f'(x)$ als Potenzreihe und als Bruch von Polynomen.

(c) Bestimmen Sie Polynome $t(x)$ und $u(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} = \frac{t(x)}{u(x)}$ für $x \in D$.

(d) Bestimmen Sie Polynome $v(x)$ und $w(x)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1} = \frac{v(x)}{w(x)}$ für $x \in D$.