Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 17

Platzaufgaben

Platzaufgabe 60

(a) Berechnen Sie $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{\, t \in \mathbb{R} \,:\, \exp(\mathrm{i}t) = -1 \,\}$.

(c) Berechnen Sie $\ln(2\mathrm{e}) - \ln(2)$.

(d) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.

(e) Zeigen Sie: Es ist $x^x = \exp(x\ln(x))$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} x^x$.

(f) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)\cos(2x) = a\sin(x) + b\sin(3x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Platzaufgabe 61
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2$.
Wir kennen ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} unter Verwendung der Formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} unter Verwendung der Formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^a = ax^{a-1}$.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b).

Platzaufgabe 62 Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{2+x}$.
Wir betrachten die Unterteilung $\underline{x} := (-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)$ von $[-1, 1]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Tragen Sie auch die Unterteilung $\underline{x}$ in Ihrer Skizze ein.
Veranschaulichen Sie die Untersumme $\mathrm{Unter}(f, \underline{x})$ und die Obersumme $\mathrm{Ober}(f, \underline{x})$ als Flächeninhalte.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Unter}(f, \underline{x})$ und $\mathrm{Ober}(f, \underline{x})$.

(c) Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x \leqslant B$ und $B - A \leqslant 0{,}5$.

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 17

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 07.06.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 65

(a) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\sin(3x)\cos(x)^2 = a\sin(x) + b\sin(3x) + c\sin(5x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sin(3x)\cos(x)^2$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)\ln(x^2+2x+1)$.

Hausaufgabe 66

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ unter Verwendung von exp und der Regel von l'Hôpital.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\vartheta \in [0,1]$ mit $\ln(x+1) - \ln(x) = (x+\vartheta)^{-1}$.
Folgern Sie: Es ist $\ln(x+1) - \ln(x) \geqslant (x+1)^{-1}$.

(c) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$.
Zeigen Sie: Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
Folgern Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$ ist monoton wachsend.

Hausaufgabe 67 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x)$ der Sinus hyperbolicus.
Seine Umkehrfunktion heißt Areasinus hyperbolicus, geschrieben

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f^{-1}(x) =: \operatorname{arsinh}(x).$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen $y = f(x)$, den Graphen $y = f^{-1}(x)$ und die Gerade $y = x$ in ein gemeinsames Schaubild.

(b) Vereinfachen Sie $\cosh(\operatorname{arsinh}(x))^2$ zu einem Polynom, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arsinh}(x)}{\ln(x)}$.

Hausaufgabe 68 Sei $f : [-2,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := 2^{-x^2}$.
Wir betrachten die Unterteilung $\underline{x} := (-2,-1,0,1,2)$ von $[-2,2]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Tragen Sie auch die Unterteilung $\underline{x}$ in Ihrer Skizze ein.
Veranschaulichen Sie $\operatorname{Unter}(f,\underline{x})$ und $\operatorname{Ober}(f,\underline{x})$ als Flächeninhalte.

(b) Begründen Sie anhand der Skizze: Es ist $\operatorname{Ober}(f,\underline{x}) - \operatorname{Unter}(f,\underline{x}) \geqslant 1$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Unter}(f,\underline{x})$ und $\operatorname{Ober}(f,\underline{x})$.

(d) Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leqslant \displaystyle\int_{-2}^{2} 2^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant B$ und $B - A \leqslant 2$.