Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 20

Platzaufgaben

Platzaufgabe 70 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + x^2y^2 - 6x$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Platzaufgabe 71 Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy + y^2 - 12$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\nabla_g(x, y)$.

(b) Geben Sie das Lagrange-Gleichungssystem für f unter Nebenbedingung $g = 0$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(d) Entscheiden Sie für jede Flachstelle aus (c), ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(e) Entscheiden Sie, ob $(4, 2)$ eine Flachstelle von f ist.

Platzaufgabe 72 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Platzaufgabe 73 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - 1)(y + 2)$.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f.

(b) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x, y) = 0 \,\}$ von f.
Markieren Sie darin mit „+“ die Bereiche, in denen f positive Funktionswerte hat.
Markieren Sie darin mit „−“ die Bereiche, in denen f negative Funktionswerte hat.

(c) Entscheiden Sie anhand Ihrer Skizze, ob die Flachstelle eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

(d) Vergleichen Sie das Resultat aus (c) mit der von der Hessematrix gelieferten Aussage.

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 20

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 28.06.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 77 Gegeben ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x\left((x-2)(4z-z^2) + x(y+1)^2\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

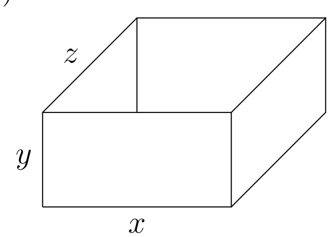
(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, die in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ liegt, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Hausaufgabe 78 In einem Freibad wird ein neues quaderförmiges Becken errichtet. Dieses hat Breite x, Höhe y und Länge z. Hierbei seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Maßeinheit ist Meter.

Außenwandfläche und Bodenfläche sollen zusammen möglichst klein werden, um die Kosten zu minimieren. Außenwandfläche und Bodenfläche betragen zusammen $f(x, y, z) := 2xy + 2yz + xz$. Als Kapazitätsvorgabe muss das Volumen des Beckens genau $500\,\mathrm{m}^3$ betragen. Das Volumen ist xyz. Also muss mit $g(x, y, z) := xyz - 500$ die Bedingung $g(x, y, z) = 0$ erfüllt sein.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Ist die Flachstelle aus (a) eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?



Hausaufgabe 79 Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto -x^2 + y(5x+2z) + 4z^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 12,\ xy - z^2)$.

(a) Geben Sie das Lagrange-Gleichungssystem für f unter Nebenbedingung $g = 0$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $(2, 2, -2)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist. Ist $(2, 2, -2)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$?

Hausaufgabe 80

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(x - y^2)$.

Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x, y) = 0 \,\}$ von f.
Markieren Sie darin mit „$+$“ die Bereiche, in denen f positive Funktionswerte hat.
Markieren Sie darin mit „$-$“ die Bereiche, in denen f negative Funktionswerte hat.

Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1, 1)$ eine lokale Extremstelle von f ist.

(b) Sei $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x, y, z, w) \mapsto -2x^2z + x + y - y^2(w^2+1) + z^4 - (2z-1)^2$.
Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine Flachstelle von h ist. Ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ eine eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von h?