

## Mathematik 2 für Informatiker

**Blatt 22**

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 77**

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = 2xy$  auf  $\mathbb{R}$ .
- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = 2xy + e^{x^2}$  auf  $\mathbb{R}$ .
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = 2xy + e^{x^2}$  auf  $\mathbb{R}$  mit Anfangsbedingung  $y(0) = 2$ .

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis jeweils mit einer Probe.

**Platzaufgabe 78** Wir betrachten die Differentialgleichung  $y' = 3y \cdot \cos(x)$ .

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf  $\mathbb{R}$ . Probe!
- (b) Sei  $f(x, y) := 3y \cdot \cos(x)$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .  
Finden Sie ein  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $|f_y(x, y)| \leq L$  für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- (c) Sei  $y(x)$  die Lösung zum Anfangswert  $y(\pi) = 1$ .  
Sei  $\tilde{y}(x)$  die Lösung zum Anfangswert  $\tilde{y}(\pi) = -1$ .

Mit der Wahl von  $L$  aus (b) erhalten wir aus der Theorie die Abschätzung

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y(\pi) - \tilde{y}(\pi)| \cdot e^{L|x-\pi|}$$

für  $x \in \mathbb{R}$ .

Bestätigen Sie diese Abschätzung durch eine direkte Betrachtung. Hierfür können Exponenten verglichen werden. Skizze!

**Platzaufgabe 79** Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem  $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$ .

- (a) Schreiben Sie das in Vektorform gegebene Differentialgleichungssystem als ein System von einzelnen Differentialgleichungen für die unbekannt Funktionen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf  $\mathbb{R}_{>0}$ . Probe!
- (c) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung  $y(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## Mathematik 2 für Informatiker

**Blatt 22**

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 12.07.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

**Hausaufgabe 85**

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .
- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + e^{2\sqrt{x}}$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis jeweils mit einer Probe.

**Hausaufgabe 86** Wir betrachten die Differentialgleichung  $y' = 2x \cdot \cos(y)^2$  auf  $] -2, 2[$ .

- (a) Bestätigen Sie: Es ist  $\cos(t)^2 = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$  für  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf  $] -2, 2[$ . Probe!
- (c) Sei  $y = y(x)$  die Lösung zum Anfangswert  $y(1) = 0$ .  
Sei  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$  die Lösung zum Anfangswert  $\tilde{y}(1) = \frac{\pi}{4}$ .  
Skizzieren Sie die Graphen von  $y$  und  $\tilde{y}$  in einer gemeinsamen Skizze. Taschenrechner!
- (d) Bestimmen Sie ein  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y(1) - \tilde{y}(1)| \cdot e^{L|x-1|}$  für  $x \in ] -2, 2[$ .

**Hausaufgabe 87** Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem  $y' = \begin{pmatrix} \frac{1+x}{x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x} & -1 & 0 \\ 1+x & 0 & \frac{1}{1+x} \end{pmatrix} y$ .

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems auf  $\mathbb{R}_{>0}$ . Probe!
- (b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung  $y(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 2e \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Hausaufgabe 88** Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem  $y' = \begin{pmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} y$ .

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems auf  $\mathbb{R}$ . Probe!
- (b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung  $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .