Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 23

Platzaufgaben

Platzaufgabe 80 Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} -7 & -18 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} y$.

(a) Entscheiden Sie, welches der folgenden Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem ist.

(1) $(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

(2) $(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix})$

(3) $(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix})$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Platzaufgabe 81 Sei $D := \mathbb{R}_{>0}$. Für $x \in D$ sei $A(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $g(x) := \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2+x) \\ x \end{pmatrix}$.
Wir betrachten das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y + g(x)$.
Aus Platzaufgabe 79 kennen wir das Tupel von Lösungen

$$(y_{[1]}, y_{[2]}) = (y_{[1]}(x), y_{[2]}(x)) = (\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x})$$

des zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$.

(a) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante von $(y_{[1]}, y_{[2]})$.

(b) Ist $(y_{[1]}, y_{[2]})$ ein Fundamentalsystem?

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$.

(d) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$. Probe!

Platzaufgabe 82 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

(a) Ist A diagonalisierbar?

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS =: D$ diagonal.

(c) Berechnen Sie $\exp(Dx)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) Berechnen Sie $\exp(Ax) = S\exp(Dx)S^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(e) Überprüfen Sie zur Probe, ob $\det(\exp(Ax)) = \exp(\mathrm{tr}(Ax))$ ist.

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 23

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 19.07.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 89 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & 0 & 3 \\ 15 & 9 & -1 & 3 \\ -30 & -18 & 0 & -7 \end{pmatrix} y$.

(a) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem auf $\mathbb{R}$?

$$(y_{[1]}(x), y_{[2]}(x), y_{[3]}(x), y_{[4]}(x)) \;=\; \left(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 90 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ und $g(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Tupel $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$ von Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ mit Wronski-Determinante $\mathrm{w}(0) \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$. Probe!

Hausaufgabe 91 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) := \begin{pmatrix} 2x & 1-2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x-1 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}$ und $g(x) := \begin{pmatrix} 1+2x^2 \\ x+1 \\ x \end{pmatrix}$.

(a) Verwenden Sie Hausaufgabe 88, um ein Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Probe!

Hausaufgabe 92 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Berechnen Sie $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$.