Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 24

Platzaufgaben

Platzaufgabe 83 Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + \mathrm{e}^{2x} \\ y_2' &= y_2 + \mathrm{e}^{x} \;. \end{aligned}$$

Das heißt, mit $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $g(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}$ betrachten wir das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay + g(x)$.

Aus Platzaufgabe 82.(d) wissen wir: $\exp(Ax) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_{[0]}(x)$ von $y' = Ay + g(x)$.

(c) Geben Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + g(x)$ an.

Platzaufgabe 84 Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ das Differentialgleichungssystem

$$y' = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} .$$

(a) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS =: J$ in Jordanform.

(b) Bestimmen Sie $S\cdot\exp(Jx)$. Bestimmen Sie daraus ein Fundamentalsystem $(y_{[1]}(x), y_{[2]}(x))$ für $y' = Ay$.

(c) Bestimmen Sie $\exp(Ax) = S\cdot\exp(Jx)\cdot S^{-1}$. Bestimmen Sie daraus ein Fundamentalsystem $(\tilde{y}_{[1]}(x), \tilde{y}_{[2]}(x))$ für $y' = Ay$.

(d) Finden Sie $t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{y}_{[2]}(x) = t_1 y_{[1]}(x) + t_2 y_{[2]}(x)$.

(e) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}$.

(f) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} \\ \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Platzaufgabe 85 Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ das Differentialgleichungssystem $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) y$.

(a) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Mit $S := \left(\begin{smallmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist $S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right) =: J$ diagonal. Siehe Skript, §6.3.2.1.
Bestimmen Sie $S\cdot\exp(Jx)$. Bestimmen Sie $\exp(Ax) = S\cdot\exp(Jx)\cdot S^{-1}$.

(b) Wir wollen ein Fundamentalsystem $(y_{[1]}(x), y_{[2]}(x))$ für $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) y$ bestimmen.
Wir erinnern uns daran, dass $y_{[1]}$ und $y_{[2]}$ Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{2\times 1}$ sein sollen.
Bilden die Spalten von $S\cdot\exp(Jx)$ ein solches Fundamentalsystem?
Bilden die Spalten von $\exp(Ax)$ ein solches Fundamentalsystem?

Mathematik 2 für Informatiker

Blatt 24

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 26.07.21 um 11:00 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 93 Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar mit $S^{-1}AS =: D$ diagonal.
Bestimmen Sie $S \cdot \exp(Dx)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$, ohne dafür S^{-1} zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^6 \\ \mathrm{e}^6 \\ 0 \\ \mathrm{e}^6 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 94 Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Sei $\chi_A(X) = -(X-6)^3$ bereits bekannt.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 95 Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 9x \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}$.

Hausaufgabe 96 Wir betrachten die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Aus Hausaufgabe 92 kennen wir bereits $\mathrm{e}^{Ax} = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-6x & 4x \\ 0 & 0 & -9x & 1+6x \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \mathrm{e}^x \\ 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.